Mathematik – Ein Vorkurs für Studienanfänger

Aufgabensammlung

Diese für Ergänzungen jederzeit offene Aufgabensammlung soll dem Studenten helfen, den Stoff des Vorkurses „Mathematik – Ein Vorkurs für Studienanfänger“ mit Bleistift und Papier nachzuarbeiten, ihn so zu durchdringen, anzuwenden und zu verstehen.

Auch dann, wenn es der Aufgabentext nicht explizit verlangt, sollten bei der Lösung der Aufgaben, wann immer möglich, **Skizzen** angefertigt werden, um eine Anschauung des jeweiligen Sachverhaltes zu gewinnen.

Wir folgen der Gliederung des Vorkurses in acht Kapitel, beginnen also mit der Exponentialfunktion. Jedem der Videos – diese numeriert innerhalb der Kapitel – ordnen wir drei Übungsaufgaben unterschiedlichen Schwierigkeitsgrades zu.

- Aufgaben der **Kategorie A** betreffen direkt die auf den Tischvorlagen oder im Skript benutzten Beispiele und sollen diese, etwa durch Berechnung von Zahlenbeispielen, illustrieren.

- Aufgaben der **Kategorie B** enthalten zwar neue, in der Regel physikalische Kontexte. Jedoch lassen sich die in den Videos präsentierten Formeln direkt auf die neue Situation übertragen. Es gilt das FEYNMANsche Motto „The same equations have the same solutions“.

- Die Aufgaben der **Kategorie C** haben insofern einen etwas höheren Schwierigkeitsgrad, als aus dem inhaltlichen Zusammenhang heraus oftmals die zu lösenden Gleichungen erst aufgestellt und in eine Form gebracht werden müssen, so daß dann die im Kurs dargebotenen Lösungsmethoden direkt anwendbar sind.

Die einer Aufgabe angefügte Bezeichnung V2-C bedeutet beispielsweise, daß es sich um eine Aufgabe vom Schwierigkeitsgrad C handelt, die inhaltlich und methodisch zu dem Video Nr. 2 eines bestimmten Themas paßt. Die Zuordnung einzelner Aufgaben zu diesen Kategorien ist natürlich mit einer gewissen Willkür behaftet, denn was der Eine als leicht zu lösende Aufgabe empfindet, kann einem Anderen durchaus Schwierigkeiten bereiten und umgekehrt.

Während die Aufgaben der Kategorien A und B in verwandten Formulierungen häufig in der Literatur zu finden sind, handelt es sich bei den Aufgaben der Kategorie C oftmals um Unikate, so daß eine Quellenangabe unerläßlich ist. Daher fügen wir eine mit der Aufgabensammlung wachsende Liste der von uns benutzten Lehrbücher und Aufgabensammlungen an.

Literatur

[Salas 1990] Salas, S.L., Hille, E.: *Calculus – One and Several Variables*,
John Wiley & Sons New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore 1990 (6th ed.)

[Marsden 1985] Marsden, J., Weinstein, A.: *Calculus*, 3 Vols.,
Springer New York, Berlin, Heidelberg, Tokio 1985 (2nd ed.)

[Heuser 1995] Heuser, H.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*,
B.G. Teubner Stuttgart 1995 (3. Aufl.)

[Minorski 1990] Minorski, W.P.: *Aufgabensammlung zur höheren Mathematik*,
Fr. Vieweg & Sohn Braunschweig, Wiesbaden 1990 (12. Aufl.)

Mathematik – Ein Vorkurs für Studienanfänger

Aufgabensammlung

Thema 1: **Die Exponentialfunktion**

In **Aufgabe 1** wird noch einmal die Eulersche Zahl e als Grenzwert berechnet, hier nicht für $\varepsilon \to 0$, sondern für $n \to \infty$.

Aufgabe 2 greift das physikalische Einführungsbeispiel wieder auf, überträgt den Durchgang von Licht durch Glas auf die Absorption durch trübes Wasser und führt den Begriff „Halbwertstiefe“ ein.

In **Aufgabe 3** werden die Begriffe und Methoden von Aufgabe 2 sinngemäß auf die “barometrische Höhenformel“ übertragen, die die Abnahme des Luftdrucks mit der Höhe über der Erdoberfläche beschreibt. Diese Übertragung ist möglich, da die zugrunde liegenden Differentialgleichungen einander strukturell ähnlich sind.

Die in **Aufgabe 4** zu berechnenden Grenzwerte sollen mit Hilfe der Eulerschen Zahl e ausgedrückt werden.

In **Aufgabe 5** werden Funktionen diskutiert, die die Exponentialfunktion e^x enthalten und insbesondere in der Quantentheorie und der statistischen Physik von Bedeutung sind, darunter die Gaußsche Glockenkurve. Wer mit der Durchführung von Kurvendiskussionen noch nicht vertraut ist, kann diese Aufgabe dem Kapitel „Differentialrechnung mit einer Variablen“ zuordnen.

Die in **Aufgabe 6** behandelte fiktive Situation soll an einem Beispiel zur Illustration des Satzes „Die Exponentialfunktion e^x wird für $x \to \infty$ stärker unendlich als jede noch so große Potenz von x“ dienen.

Gegenstand von **Aufgabe 7** ist eines der prominentesten Beispiele für die Anwendung der Exponentialfunktion: der radioaktive Zerfall (ohne und mit konstante(r) Zufuhr) mit dem charakteristischen Begriff „Halbwertszeit“.

Das Beispiel von **Aufgabe 8**, das Newtonsche Abkühlungsgesetz, hat auf den ersten Blick mit dem radioaktiven Zerfall nichts zu tun. Jedoch ist die zugrunde liegende Differentialgleichung der des radioaktiven Zerfalls mit konstanter Zufuhr strukturell ähnlich. Beschrieben wird hier der zeitliche Verlauf eines Ausgleichsvorgangs, egal ob es sich um die Abkühlung von heißem Eisen oder von Kaffee oder Bier handelt.

Aufgabe 9 gehört auch in diese Kategorie. Am Beispiel des Herabsinkens einer Stahl- oder Bleikugel in einer zähen Flüssigkeit muß jedoch, ausgehend vom Newtonschen Kraftgesetz, aus einer Kräftebilanz die zu lösende Differentialgleichung erst aufgestellt werden. Diese Aufgabe ist die theoretische Grundlage für einen bekannten Praktikumsversuch: die Kugelfallmethode zur Bestimmung der Viskosität einer Flüssigkeit.

Aufgabe 1: *Die Zahl e als Grenzwert (V1-A)*

Eine Möglichkeit, die Zahl e näherungsweise zu bestimmen, besteht darin, in

$$e = \lim_{\varepsilon \to 0} (1+\varepsilon)^{1/\varepsilon}$$

die kleine Zahl ε durch $\varepsilon = \pm \frac{1}{n}$ mit n als großer ganzer Zahl zu ersetzen und die Grenzwerte

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}$$

zu betrachten.
Berechnen Sie mit Hilfe eines Taschenrechners auf sechs Stellen nach dem Komma genau die Ausdrücke

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n,$$

indem Sie für n die Zehnerpotenzen von $n = 10$ bis $n = 10^5$ einsetzen. Tragen Sie die Ergebnisse in eine Tabelle ein. Vergleichen Sie die Einträge dieser Tabelle mit denen jener Tabelle, die in der Vorlesung für $\varepsilon \to 0$ angegeben wurde.

Aufgabe 2: *Das* LAMBERT-BEER*sche Absorptionsgesetz (V1-B)*

a) In der Tiefe des Meeres ist es dunkel, weil die Intensität des Lichtes beim Durchgang durch Wasser infolge Absorption ständig geringer wird. Es sei $I(x)$ die Lichtintensität x Meter unter der Wasseroberfläche. Begründen Sie für die Intensitätsabnahme ΔI den Ansatz

$$\Delta I \approx -\alpha \cdot I(x) \cdot \Delta x\,, \quad (\alpha > 0 : \text{Absorptionskoeffizient})$$

und leiten Sie aus diesem das LAMBERT-BEERsche Absorptionsgesetz

$$I(x) = I_0\, e^{-\alpha x}$$

her.

- **Beispiel**: Für Tageslicht und sauberes Wasser ist $\alpha = 1{,}4\,\frac{1}{\text{m}}$, für trübes Seewasser ist $\alpha = 2\,\frac{1}{\text{m}}$. Berechnen Sie den Transmissionsfaktor $\kappa = \frac{I(x)}{I_0}$ und geben Sie an, wieviel Prozent der Tageslicht-Intensität I_0 an der Wasseroberfläche jeweils in 1 m, 2 m, 3 m und 4 m Tiefe noch vorhanden sind.
- Definieren Sie eine „Halbwertstiefe“ $x_{(1/2)}$, in der die Intensität nur noch die Hälfte ihres Ausgangswertes beträgt, und berechnen Sie diese für sauberes und trübes Seewasser.

b) Übertragen Sie die bisherigen Ergebnisse auf den Durchgang von Licht durch Glas.

- **Beispiel**: Ein 25 mm dickes Glas absorbiert bei der Wellenlänge 620 mm etwa 3/1000 der einfallenden Lichtintensität. Berechnen Sie den Absorptionskoeffizienten α des Glases. Wie groß ist der Transmissionsfaktor κ für eine Dicke von 5 mm?

Quelle zu (a): [Heuser 1995], S. 38

Aufgabe 3: *Die barometrische Höhenformel (V1-B)*

Die Abnahme des Luftdrucks p mit der Höhe h über der Erdoberfläche wird durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}p(h)}{\mathrm{d}h} = -\frac{\varrho_0}{p_0} g \cdot p(h)$$

beschrieben. Darin bedeuten g die Schwerebeschleunigung, p_0 den Luftdruck und ϱ_0 die Dichte der Luft an der Erdoberfläche.

a) Schreiben Sie die Lösung dieser Differentialgleichung auf. Diese Lösung heißt „barometrische Höhenformel“.

b) Welche Bedeutung hat die Proportionalitätskonstante $\frac{\varrho_0}{p_0} g$? Beschreiben Sie diese Konstante mit dem Begriff „Halbwertshöhe“ und ersetzen Sie in der barometrischen Höhenformel diese Konstante durch die Halbwertshöhe $h_{(1/2)}$.

c) Berechnen Sie die Halbwertshöhe aus den Zahlenwerten $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Pa für den Druck und $\varrho_0 = 1{,}3 \cdot 10^{-3}\,\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ für die Dichte der Luft am Boden.

d) **Beispiel** (Kategorie C): Berechnen Sie den Abfall des Außendrucks pro Sekunde für einen Ballon, der in 650 m Höhe eine Steiggeschwindigkeit von $3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$ hat.
Hinweis: Kettenregel

Quelle zu (d): [Marsden 1985], Bd. 1, S. 333

Aufgabe 4: *Grenzwerte (V2-B)*

Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(i)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{5}{n}\right)^n, \qquad \text{(ii)}\quad \lim_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}, \qquad \text{(iii)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{n^2+1}\right)^{n^2},$$

$$\text{(iv)}\quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n}\right)^n, \qquad \text{(v)}\quad \lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{4}{n}\right)^{n+3}, \qquad \text{(vi)}\quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}(\sin 2x)^{\tan^2 2x},$$

indem Sie sie auf den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = e$$

zurückführen.

Hinweis zu (vi): Setzen Sie $\cos^2 2x = \varepsilon$.

(V2-B); Quelle: [Minorski 1990], S. 102/103

Aufgabe 5: *Mit der Exponentialfunktion verwandte Funktionen (V2-B)*

a) Skizzieren Sie für $x \geq 0$ die Graphen der für die Physik bedeutsamen, die Exponentialfunktion enthaltenden Funktionen

$$\text{(i)}\quad y = 1-e^x, \qquad \text{(ii)}\quad y = \frac{1}{e^x+1}, \qquad \text{(iii)}\quad y = \frac{1}{e^x-1}.$$

b) Führen Sie für die GAUSSsche Glockenkurve

$$y = e^{-a^2x^2}$$

sowie – zum Vergleich – für die Funktion

$$y = e^{-a|x|}, \quad (a > 0)$$

eine Kurvendiskussion durch (Symmetrien, Nullstellen, asymptotisches Verhalten, Extrema, Wendepunkte, Anstieg der Wendetangenten) und skizzieren Sie die Graphen dieser Funktionen.

Berechnen Sie die Halbwertsbreiten Δx. Welche anschauliche Bedeutung können Sie jeweils der Größe a geben?

Aufgabe 6: *Ein fiktives Wettrennen (V2-C)*

An einem fiktiven Wettrennen auf schnurgerader Bahn (x-Achse) beteiligen sich die beiden Rennwagen mit den Bezeichnungen LIN und EXP. Der zeitliche Ablauf des Rennens von LIN wird durch

$$x_1(t) = k_1 t + c_1$$

und der von EXP durch

$$x_2(t) = A e^{k_2 t} + c_2 , \quad (A = 1\,\mathrm{m})$$

beschrieben. Zur Zeit $t = 0$ starten beide Wagen an der Stelle $x_0 = 0$, LIN mit der Geschwindigkeit $v_{01} \equiv v_1(0) = 10^6\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, EXP mit $v_{02} \equiv v_2(0) = 1\,\dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

a) Bestimmen Sie aus diesen Angaben die Konstanten k_1, c_1, k_2 und c_2.

b) Infolge seiner großen Anfangsgeschwindigkeit liegt LIN zunächst vorn. Finden Sie den Zeitpunkt des Rennens heraus, von dem ab der Vorsprung von LIN gegenüber EXP nicht mehr wächst.

c) Zeigen Sie, daß 15 s nach Rennbeginn LIN noch vorn liegt, 3 s später jedoch bereits von EXP überholt wurde. Zeigen Sie weiter, daß von nun an EXP nicht mehr einholbar ist.

Quelle: [Salas 1990], S. 382/383

Aufgabe 7: *Radioaktiver Zerfall (V3-A)*

Zur Zeit t seien $n(t)$ Atome einer radioaktiven Substanz vorhanden. Die Zerfallsrate $\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}t}$ ist der gerade vorhandenen Anzahl proportional, so daß

$$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot n(t) , \quad (\lambda > 0)$$

die Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls ist. Schreiben Sie die Lösung dieser Gleichung mit dem Anfangswert $n(0) = n_0$ auf und behandeln Sie mit ihrer Hilfe folgende **Beispiele**:

a)
- Radioaktives Cäsium-137 verliert durch Zerstrahlung 2,3% seiner Masse pro Jahr. Wie groß sind die Zerfallskonstante λ und die Halbwertszeit $t_{(1/2)}$?
- Es sei β die konstante Menge an radioaktivem Cäsium-137, die als Nebenprodukt des radioaktiven Zerfalls pro Jahr an die Atmosphäre abgegeben wird. Damit ist die Differentialgleichung des radioaktiven Zerfalls

  $$\frac{\mathrm{d}n(t)}{\mathrm{d}t} = -\lambda \cdot n(t) + \beta .$$

  Bestimmen Sie den stabilen Vorrat an Cäsium, angegeben als Vielfaches des jährlichen Ausstoßes, der sich in der Atmosphäre ansammelt.

b) Die Halbwertszeit von Kalium-42 beträgt 12,45 Stunden. Wieviel Prozent des Ausgangsmaterials sind nach 10 Stunden noch vorhanden? Nach wieviel Stunden werden 5% des Ausgangsmaterials zerstrahlt sein?

c) Radioaktive Abfälle werden in Behältern aus rostfreiem Stahl oder Beton unter der Erde gelagert. Die Behälter sollen intakt bleiben, bis 99,99% des Abfalls zerstrahlt sind. Stellen Sie die Mindesthaltbarkeitsdauer $t_{\min}$ als Vielfaches der Halbwertszeit $t_{(1/2)}$ des in ihnen gelagerten Abfalls dar und berechnen Sie diese für Strontium-90 ($t_{(1/2)} = 28\,\mathrm{a}$), Radium-226 ($t_{(1/2)} = 1620\,\mathrm{a}$) und Plutonium-239 ($t_{(1/2)} = 24\,360\,\mathrm{a}$).

Quelle: [Heuser 1995], S. 36/37, S. 75/76

Aufgabe 8: *Das* NEWTON*sche Abkühlungsgesetz (V3-B)*

Ein Körper befinde sich in einer Umgebung mit der konstanten Temperatur T_U und habe selbst zur Zeit $t = 0$ die Temperatur T_0. Je nachdem, ob $T_0 > T_U$ oder $T_0 < T_U$ ist, gibt der Körper Wärme an die Umgebung ab oder nimmt Wärme aus ihr auf, bis ein Temperaturausgleich hergestellt ist. Dieser Vorgang verläuft nach dem NEWTONschen Abkühlungsgesetz

$$\frac{\mathrm{d}T(t)}{\mathrm{d}t} = -k[T(t) - T_U], \quad k = \mathrm{const} > 0\,.$$

a) Geben Sie an, wie der Ausgleichsvorgang zeitlich vonstatten geht. Welche Endtemperatur hat der Körper nach langer Zeit?

b) **Beispiel**: Heißes Eisen habe eine Temperatur von 830 °C bei einer Raumtemperatur von 32 °C. Nach einer Minutebeträgt die Temperatur des Eisens 600 °C. Der Schmied muß warten, bis die Temperatur des Eisens 450 °C beträgt. Wie lange dauert das, gerechnet von dem Zeitpunkt an, als das Eisen eine Temperatur von 600 °C hatte?

c) **Beispiel**: Herr Schluckspecht entnimmt seinem Kühlschrank eine Flasche Bier, die dort schon tagelang bei einer Temperatur von 7 °C gelegen hat. In diesem Moment wird er durch seinen Bruder in ein langes Gespräch verwickelt, das eineinhalb Stunden dauert. Am Ende dieses Gesprächs ist das Bier ungenießbar, denn es hat sich bei einer Zimmertemperatur von 19 °C auf 15 °C erwärmt. Herr Schluckspecht legt die Flasche daraufhin in den Kühlschrank zurück. Er will das Bier genießen, wenn es wieder auf 8 °C abgekühlt ist. Wie lange muß er nach Beendigung des Gesprächs mit seinem Bruder noch auf den Genuß warten?

Stellen Sie den Erwärmungs- und Abkühlungsvorgang des Bieres auch graphisch dar.

Quelle zu (a): [Salas 1990], S. 384; zu (b): [Marsden 1985], Bd. 2, S. 383; zu (c): [Heuser 1995], S. 83

Aufgabe 9: *Sinken mit* Stokes*scher Reibung (V3-C)*

Eine Kugel mit dem Radius R und der Dichte ϱ_K sinke unter dem Einfluß der Schwerkraft in einer Flüssigkeit mit der Dichte ϱ_F und der Zähigkeit (Viskosität) η. Die Bewegung erfolge entlang der nach unten gerichteten x-Achse, deren Nullpunkt auf der Flüssigkeitsoberfläche liege. Die Anfangsgeschwindigkeit der Kugel sei Null. Auf die Kugel wirken

- die Schwerkraft F_G nach unten,
- der Reibungswiderstand der Flüssigkeit nach oben. Die Reibungskraft ist nach dem STOKESschen Gesetz $F_R = 6\pi\eta R v$ mit v als Geschwindigkeit der Kugel,
- der Auftrieb F_A, also das Gewicht der von der Kugel verdrängten Flüssigkeit, nach oben.

a) Leiten Sie aus dem NEWTONschen Kraftgesetz $F = ma$ den Geschwindigkeits-Zeit-Zusammenhang für die Sinkbewegung der Kugel her.

b) Welche Geschwindigkeit stellt sich für $t \to \infty$ ein?

c) **Beispiel**: Glyzerin hat bei 20 °C die Dichte $\varrho_F = 1{,}26\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und die Viskosität $\eta = 14{,}99\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}\cdot\mathrm{s}}$. Wie groß ist die Grenzgeschwindigkeit einer Stahl- und einer Bleikugel mit dem Radius $R = 1\,\mathrm{cm}$? Die Dichten sind $\varrho_{\mathrm{Stahl}} = 7{,}8\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$ und $\varrho_{\mathrm{Blei}} = 11{,}35\,\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{cm}^3}$. Nach welcher Zeit hat die Kugel 99 % ihrer Grenzgeschwindigkeit erreicht?

Quelle: [Heuser 1995], S. 87/88