Integralrechnung

Integration als Umkehrung der Differentiation.

Das unbestimmte Integral

Frage: Wie heißt Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x) = F'(x)$ gegeben ist?

Beispiel: Von welcher Funktion $F(x)$ ist $f(x) = x^4 + 6$ die Ableitung?

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \longrightarrow \text{Faktor } \frac{1}{5}\,! \\ \frac{d}{dx}(6x) = 6 \end{array}\right\} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5 + 6x\right) = x^4 + 6$$

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 6x + C}} \quad , \; C = \text{const}$$

- Funktion
- nicht eindeutig!

Bezeichnungen: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ „unbestimmtes Integral"

$F'(x) = f(x)$

$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x)$ „Anti-Differentiation"

$f(x)$: Integrand, „unter Integral"

$F(x)$: Stammfunktion

Verallgemeinerung des Beispiels

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \; n \neq -1$$

denn:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{1}{\cancel{n+1}}\,(\cancel{n+1})\,x^{(n+1)-1}$$

$$= x^n$$

Das unbestimmte Integral – Teil 2

Beispiele: Einige Grundintegrale

a) $\int e^x\,dx = e^x + C$, $\frac{d}{dx}(e^x + C) = e^x$

b) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$, $\frac{d}{dx}\left(-\cos x + C\right) = -(-\sin x) = \sin x$

c) $\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$, $\frac{d}{dx}\left(\ln|x| + C\right) = \frac{1}{x}$

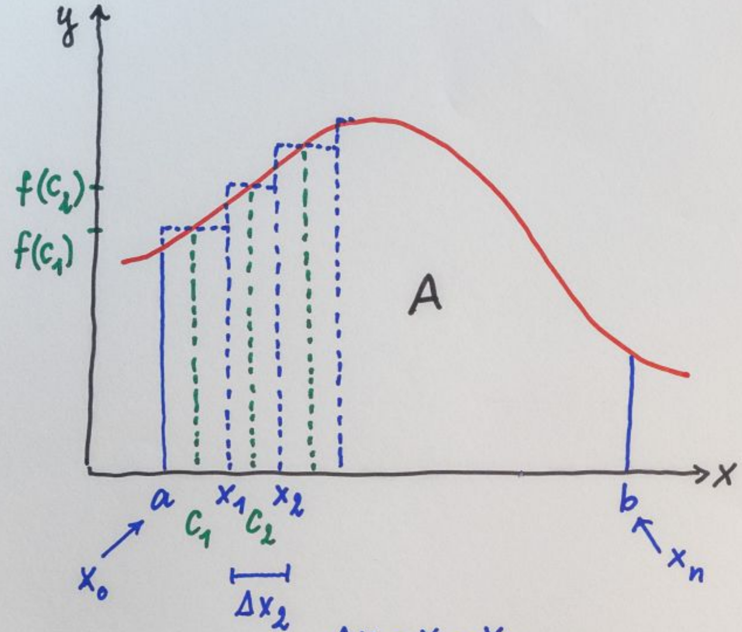
d) $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \tan x + C$, $\frac{d}{dx}\left(\tan x + C\right) = \frac{1}{\cos^2 x}$

e) $$\left.\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx &= \arcsin x + C \\ &= -\arccos x + C'\end{aligned}\right\} \arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

aber: $\int \tan x\,dx$?

$\int \ln x\,dx$?

Das bestimmte Integral



$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$

$A_n \approx \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x_i$, $\lim_{n \to \infty} A_n$ $(\Delta x_i \to 0)$

$A = \lim_{n \to \infty} A_n = \int_a^b f(x)\,dx$, $f(x)$ ist (Riemann-)integrabel

bestimmtes Integral

a untere Grenze

b obere Grenze

- Zahl (+ Maßeinheit)
- eindeutig

Zusammenhang unbestimmtes – bestimmtes Integral

- eindimensionale Bewegung auf einer Geraden

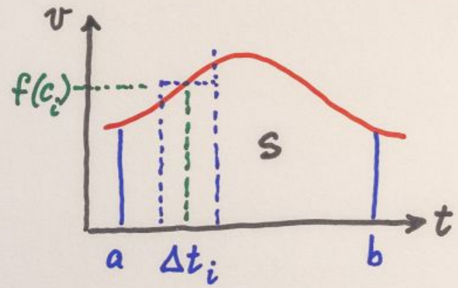
Geschwindigkeit: $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = f(t)$

Weg: $y(t) = F(t)$

$f(t) = F'(t)$

$F(t) = \int f(t)\,dt$

$\left.\begin{array}{l} t_i = a \\ t_f = b \end{array}\right\}$ Gesamtweg: $s = F(b) - F(a)$



$s_n \approx \sum_{i=1}^{n} v_i \cdot \Delta t_i$

Gesamtweg:

$s = \lim_{\substack{n \to \infty \\ (\Delta t_i \to 0)}} s_n = \int_a^b v(t)\,dt$

$= \int_a^b f(t)\,dt$

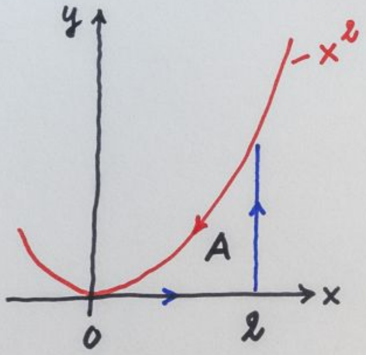
Eindeutigkeit von s : $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$, $F'(t) = f(t)$

Fundamentalsatz

Das bestimmte Integral - Teil 2

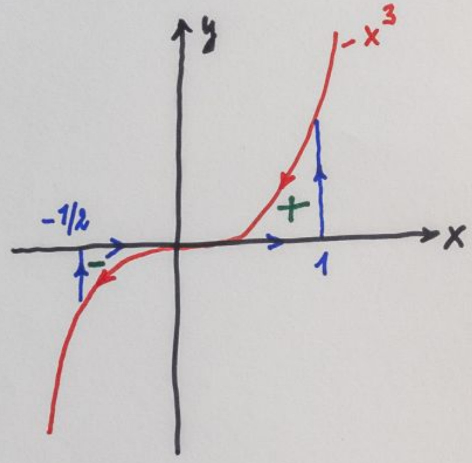
Flächenberechnung - Beispiele

1.)



$$\underline{\underline{A}} = \int_0^2 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = \underline{\underline{\frac{8}{3}}}$$

2.)



$$A_1 = \int_{-1/2}^{0} x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_{-1/2}^{0} = 0 - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{16} = -\frac{1}{64}$$

$$A_2 = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}$$

vorzeichenbehaftet!

Gesamtfläche: $A = |A_1| + A_2 = \frac{17}{64}$

Eigenschaften bestimmter Integrale

1.) $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, Zahl

x: „stumme Variable"

2.) Eindeutigkeit

$$F_1'(x) = F_2'(x) = f(x) \rightarrow F_1 = F_2 + C$$

$$F_1(b) - F_1(a) = [F_2(b) + C] - [F_2(a) + C]$$

$$= F_2(b) - F_2(a)$$

3.) Linearität

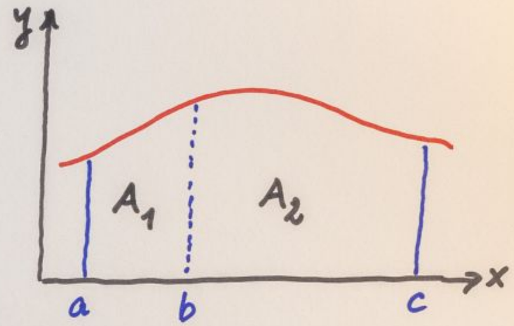
$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,dx = [\alpha F(x) + \beta G(x)]\Big|_a^b$$

$$= [\alpha F(b) + \beta G(b)] - [\alpha F(a) + \beta G(a)]$$

$$= \alpha [F(b) - F(a)] + \beta [G(b) - G(a)]$$

$$= \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$$

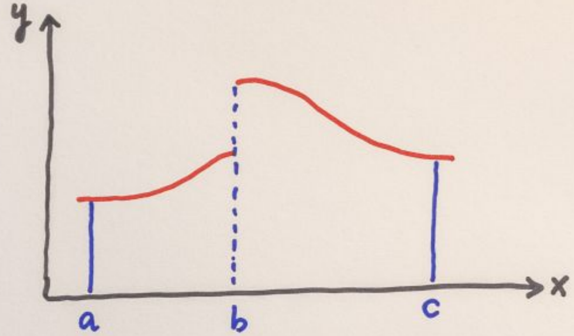
4.) Additivität der Integrationsgrenzen



$a < b < c$

$$A_1 + A_2 = \int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$[F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a)$$



weniger restriktiv als Differentiation

5.) Umkehrung des Integrationsweges

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx, \quad F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$$

speziell: $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

6.) Integration über ein zu Null symmetrisches Intervall

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{a}^{0} f(-x)\,d(-x) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(-x)\,d(-x) + \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad , \quad d(-x) = -dx$$

$$= \int_{0}^{a} \left[f(-x) + f(x) \right] dx$$

a) ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$

$$\underline{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0}$$

b) gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$

$$\underline{\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx}$$

Integrationstechniken

Substitutionsmethode – „Integration der Kettenregel"

Kettenregel: $\frac{d}{dx} F[u(x)] = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\int \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx}\, dx = F[u(x)] + C$$

$\frac{dF}{du} = f(u)$: $\int f(u)\, du = F(u) + C$

$$\int f(u) \cdot \frac{du}{dx}\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C$$

Strategie: Läßt sich im Integranden neue Variable $u = u(x)$ so einführen, daß $\frac{du}{dx}$ als Faktor zusammen mit einer Funktion $f(u)$ auftritt, deren Integral bekannt oder leichter bestimmbar?

Beispiele:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$, Substitution: $u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$\underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}}\ \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{f(u)=\sqrt{u}}$

$$= \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

b) Translation des Arguments: $\int f(x+a)\, dx$

Substitution: $u = x+a$, $\frac{du}{dx} = 1$

$$\int f(x+a)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(x+a) + C$$

c) Skalierung des Arguments

$\int f(ax)\, dx$, Substitution: $u = ax$, $\frac{du}{dx} = a$

$$= \frac{1}{a} \int a f(ax)\, dx$$

$$= \frac{1}{a} F(u) + C = \frac{1}{a} F(ax) + C$$

Substitutionsmethode – Teil 2

logarithmische Integration

logarithmische Ableitung: $\frac{d}{dx} \ln u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln|u(x)| + C = \int \frac{du}{u}$$

Strategie: Ist Integrand so, daß Zähler Ableitung des Nenners ist?

Beispiele:

a) $\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$

$= -\ln|\cos x| + C$

b) $\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx$

$= \ln|\sin x| + C$

Anmerkungen:

a) „Routine"

Substituieren: $u = g(x)$; $\frac{du}{dx} = g'(x)$, $dx = \frac{dx}{du} du$

$$\int h(x) dx = \int \frac{h(x)}{g'(x)} du = \int f(u) du$$

Beispiel:

$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$, Substitution: $u = 1 + \ln x = g(x)$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = g'(x)$

$= \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{\cancel{x}} \cancel{x}\, du$

$= \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3}(1+\ln x)^{3/2} + C$

b) Integrationsgrenzen bei bestimmten Integralen

Beispiel: $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$, Substitution: $u = 2x$

$dx = \frac{1}{2} du$

Grenzen: $x = 0 \rightarrow u = 0$

$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow u = \frac{\pi}{2}$

$$= \frac{1}{2} \sin u \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \sin u \Big|_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Integrationstechniken

Partielle Integration – „Integration der Produktregel"

Produktregel: $F(x)$, $G(x)$

$$(FG)' = F'G + FG'$$

$$\int (F'G + FG')\,dx = FG + C$$

$$\int FG'\,dx = FG - \int F'G\,dx$$

$F \equiv u(x)$, $G \equiv v(x)$

$$\int u \frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v \frac{du}{dx}\,dx$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Strategie: Läßt sich Integrand als Produkt aus u und v' auffassen, so daß v bekannt und $\int v u' dx$ leichter berechenbar?

Beispiele:

a) $\int x \cos x \, dx$, wählen $u = x$, $\frac{du}{dx} = 1$

$\frac{dv}{dx} = \cos x$, $v = \sin x$

$$= x \cdot \sin x - \int \sin x \, dx$$

$$= x \cdot \sin x + \cos x + C$$

b) $\int \ln x \, dx = \int 1 \cdot \ln x \, dx$, wählen $u = \ln x$, $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$

$\frac{dv}{dx} = 1$, $v = x$

$$= x \cdot \ln x - \int \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}\,dx$$

$$= x \cdot \ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

Integration von Umkehrfunktionen

Zurückführung der Integration einer Funktion auf bekannte Integration der Umkehrfunktion

$y = f(x) \longrightarrow x = g(y) \longrightarrow$ Umkehr: $y = g(x)$

$\int f(x)\,dx = \int 1 \cdot f(x)\,dx$, wählen $u = f(x)$

$\frac{du}{dx} = f'(x)$

$\frac{dv}{dx} = 1$, $v = x$

$= x \cdot f(x) - \int \underset{g(y)}{x} \cdot \underbrace{f'(x)\,dx}_{dy}$

$= x \cdot f(x) - \int g(y)\,dy$

$\int y\,dx = xy - \int x\,dy$

Beispiele:

a) $\int \ln x\,dx$, $y = f(x) = \ln x$, $x = g(y) = e^y$

$= x \cdot \ln x - \int e^y\,dy$

$= x \cdot \ln x - e^y + C = x \cdot \ln x - x + C$

b) $\int \arccos x\,dx$, $y = f(x) = \arccos x$, $x = g(y) = \cos y$

$= x \cdot \arccos x - \int \cos y\,dy$

$= x \cdot \arccos x - \sin y + C$

$$\left[\begin{aligned} \sin y &= \sin(\arccos x) \\ &= \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2} \end{aligned}\right.$$

$= x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C$