Rechnen mit kleinen Größen

Vorbereitende Beispiele

$\frac{v}{c} \ll 1$, v : Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne

$v \approx 30 \, \frac{km}{s}$

c : Lichtgeschwindigkeit

$c \approx 300\,000 \, \frac{km}{s}$

$\frac{v}{c} = 10^{-4} \ll 1$

Spezielle Relativitätstheorie:

Lorentz-Faktor $\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$, $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ $\longrightarrow$

$\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$

$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$

a) $(1 \pm x)^2 = 1 \pm 2x + x^2$, $x = 10^{-4} \ll 1$

$\approx \underline{\underline{1 \pm 2x}}$ $\qquad x^2 = 10^{-8} \ll 2x$

b) $\sqrt{1 \pm x} \equiv y$

$y^2 = 1 \pm x$

$\approx 1 \pm x + \frac{x^2}{4} = \left(1 \pm \frac{x}{2}\right)^2$

$y \approx 1 \pm \frac{x}{2}$, $\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}$ ||

c) $\frac{1}{1 \pm x}$: $\quad 1 : (1 \pm x) = 1 \mp x + x^2 - + \ldots$

$$\begin{array}{l} -(1 \pm x) \\ \hline \mp x \\ -(\mp x - x^2) \\ \hline x^2 \\ \vdots \end{array}$$

$\underline{\underline{\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = \frac{1}{y} \approx \frac{1}{1 \pm \frac{x}{2}} \approx \underline{\underline{1 \mp \frac{x}{2}}}$

Potenzreihen-Entwicklungen. Taylor-Polynome

$f(x)$: stetig, differenzierbar

Potenzreihen-Ansatz. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$, $a_0 = 1$

$a_1 = -\frac{1}{2}$

Entwicklungskoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots \\
f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3 a_3 x + 3\cdot 4 a_4 x^2 + \dots \\
f'''(x) &= 2\cdot 3 a_3 + 2\cdot 3\cdot 4 a_4 x + \dots
\end{aligned}
$$

$x=0$:

$$
\left.
\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f'(0) &= a_1 \\
f''(0) &= 2a_2 \\
f'''(0) &= 2\cdot 3 a_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
\right\}
$$

allgemeines Bildungsgesetz

$$f^{(n)}(0) = 1\cdot 2\cdot 3 \dots \cdot n \cdot a_n = n! \cdot a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\cdot x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

Anmerkungen

1.) $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2} f''(0) \cdot x^2 + \dots$; $x_0 = 0$, McLaurin-Reihe

$f(x) = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \dots$, Taylor-Reihe

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

2.) Konvergenzbeweis, Restgliedabschätzung

3.) Taylor-Polynom 1. Ordnung und 2. Ordnung

- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$, lineare Approximation in x_0, Tangente

- $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$

Extremwert: $f'(x_0) = 0 \longrightarrow f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2} f''(x_0) \cdot (x - x_0)^2$

Approximation durch Parabel

$f''(x_0) > 0$, Parabel nach oben geöffnet , Minimum
$f''(x_0) < 0$, -"- unten -"- , Maximum

Kleinwinkel-Näherung und Eulersche Formel

a) $f(x) = \sin x$, McLaurin-Reihe

$f(x) = \sin x$, $f(0) = 0$

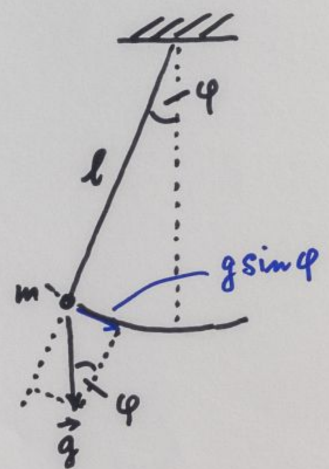
$f'(x) = \cos x$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x$, $f'''(0) = -1$

$$\underline{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - + \dots}\quad , \text{ ungerade}$$

Beispiel: Fadenpendel, Kreispendel



Bewegungsgleichung:

$$\ell m \ddot{\varphi} = -mg \sin\varphi$$

$$\ell \ddot{\varphi} + g \sin\varphi = 0$$

Kleinwinkelnäherung:

$$\sin\varphi \approx \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0$$

$\varphi = 5°$: $\hat{\varphi} = 0{,}08727$, $\sin\varphi = 0{,}08716$

$\varphi = 10°$: $\hat{\varphi} = 0{,}17453$, $\sin\varphi = 0{,}17365$

b) $f(x) = \cos x$, $f(0) = 1$

$f'(x) = -\sin x$, $f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x$, $f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x$, $f'''(0) = 0$

$$\underline{\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{x^4}{24} - + \dots}\quad , \text{ gerade}$$

c) $f(x) = e^x$, $f(0) = 1$

$f^{(n)}(x) = e^x$, $f^{(n)}(0) = 1$

$$\underline{e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \dots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

d) Eulersche Formel

$x \to ix$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, ...

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}ix^3 + - \dots$$

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + - \dots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + - \dots\right)}_{\sin x}$$

$$\underline{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$$

Lineare Approximation und Fehlerfortpflanzung

a) eine Variable : $y = f(x)$

Taylor-Polynom 1. Ordnung, lineare Approximation

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)$$

$$dy = f'(x_0)\cdot dx \longrightarrow \underline{\Delta y = f'(x_0)\cdot \Delta x} \qquad (*)$$

Beispiel : Volumen einer Kugel $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

Änderung $\Delta r \longrightarrow$

$$\Delta V = \frac{dV}{dr}\cdot \Delta r \qquad \text{(absoluter „Fehler")}$$

$$= 4\pi r^2 \cdot \Delta r$$

Oberfläche — Dicke der Kugelschale $r \to r + \Delta r$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3\cdot\frac{\Delta r}{r} \qquad \text{(relativer „Fehler")}$$

b) zwei Variable : $z = f(x,y)$

Tangente $\longrightarrow$ Tangentialebene

$$z = z_0 + f_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)$$

$$\underline{\Delta z = f_x(x_0,y_0)\cdot\Delta x + f_y(x_0,y_0)\cdot\Delta y} \qquad (**)$$

(*), (**) : Fehlerfortpflanzungs-Gesetz

Beispiel : Messung der Schwerebeschleunigung g durch <u>kleine</u> Pendelschwingungen

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \longrightarrow g = 4\pi^2\frac{\ell}{T^2}$$

$$\Delta g = \frac{\partial g}{\partial \ell}\Delta\ell + \frac{\partial g}{\partial T}\Delta T$$

$$= 4\pi^2\left(\frac{1}{T^2}\Delta\ell - 2\frac{\ell}{T^3}\Delta T\right)$$

$$= g\left(\frac{\Delta\ell}{\ell} - 2\frac{\Delta T}{T}\right)$$

relativer Größtfehler : $\frac{\Delta g}{g} = \left|\frac{\Delta\ell}{\ell}\right| + 2\left|\frac{\Delta T}{T}\right|$