Differentialrechnung mit zwei und drei Variablen

Funktionen von zwei Variablen. Partielle Ableitung

Beispiele:

- $h(x,y)$, Erhebung einer Landschaft über der Ebene

  Höhenlinien: $h = h_0 = \text{const}$

  $h(x,y) = h_0$

- Wetterkarte
  - Temperatur $T = T(x,y)$

    $T(x,y) = T_0$, Isothermen
  - Luftdruck $p = p(x,y)$

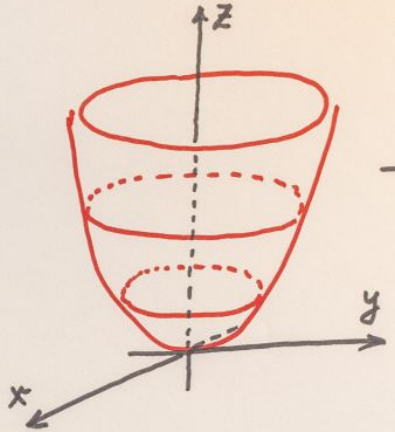
    $p(x,y) = p_0$, Isobaren

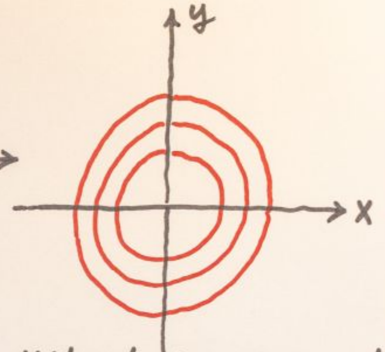
- $z = f(x,y) = x^3 y + x y^2 + x + y^2 + 1$

weitere einfache Beispiele:

a) $z = f(x,y) = x^2 + y^2$

$$\left.\begin{array}{l} x=0: \quad z = y^2 \\ y=0: \quad z = x^2 \\ z = c = \text{const}: \quad x^2 + y^2 = c \end{array}\right\} \text{Paraboloid}$$





Höhenlinien $z = \text{const}$

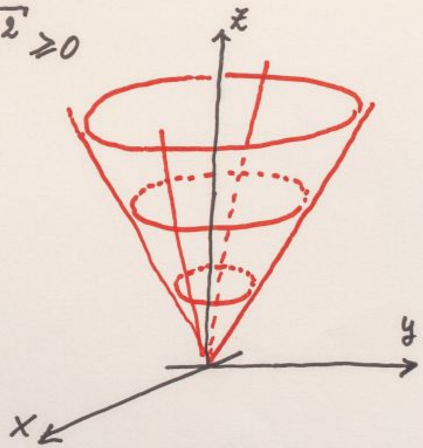
b) $z = f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2} \geq 0$

$x = 0: \quad z = \pm y$

$y = 0: \quad z = \pm x$

Höhenlinien:

$x^2 + y^2 = c^2$

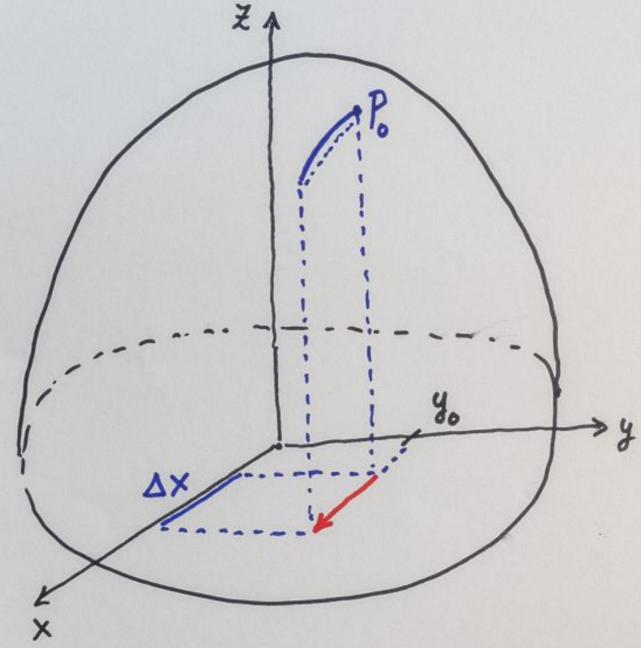


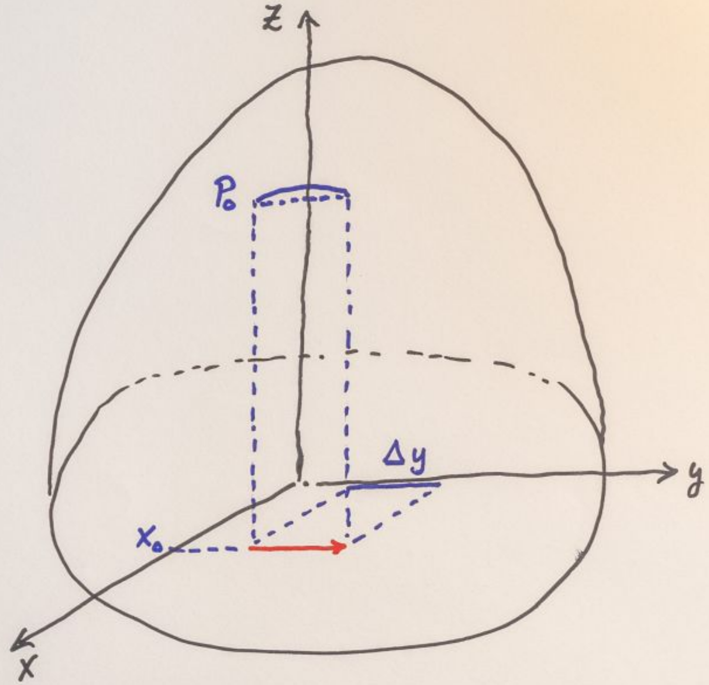
c) $z = f(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2} \geq 0$, Halbkugel : $R = 2$

Höhenlinien: $4 - x^2 - y^2 = c^2$

$x^2 + y^2 = 4 - c^2$, $c \leq 2$

Kreise





Fortschreiten in x-Richtung: $y = y_0$

$x \longrightarrow x + \Delta x$

Fortschreiten in y-Richtung: $x = x_0$

$y \longrightarrow y + \Delta y$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x \equiv \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x} \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y \equiv \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y+\Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}$$

partielle Ableitungen

Funktionen von zwei Variablen. Partielle Ableitungen — Teil 2

Kettenregel „Funktion von zwei Funktionen"

$$z = f\left[x(t), y(t)\right]$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$ „totale Ableitung"

Beispiel:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}\right)$$ „Reisegleichung"

Rechenbeispiele:

a) $z = \sin(xy)$, $x = t^2$, $y = t^3$

$= \sin(t^5) \rightarrow \frac{dz}{dt} = \underline{5t^4 \cdot \cos(t^5)}$

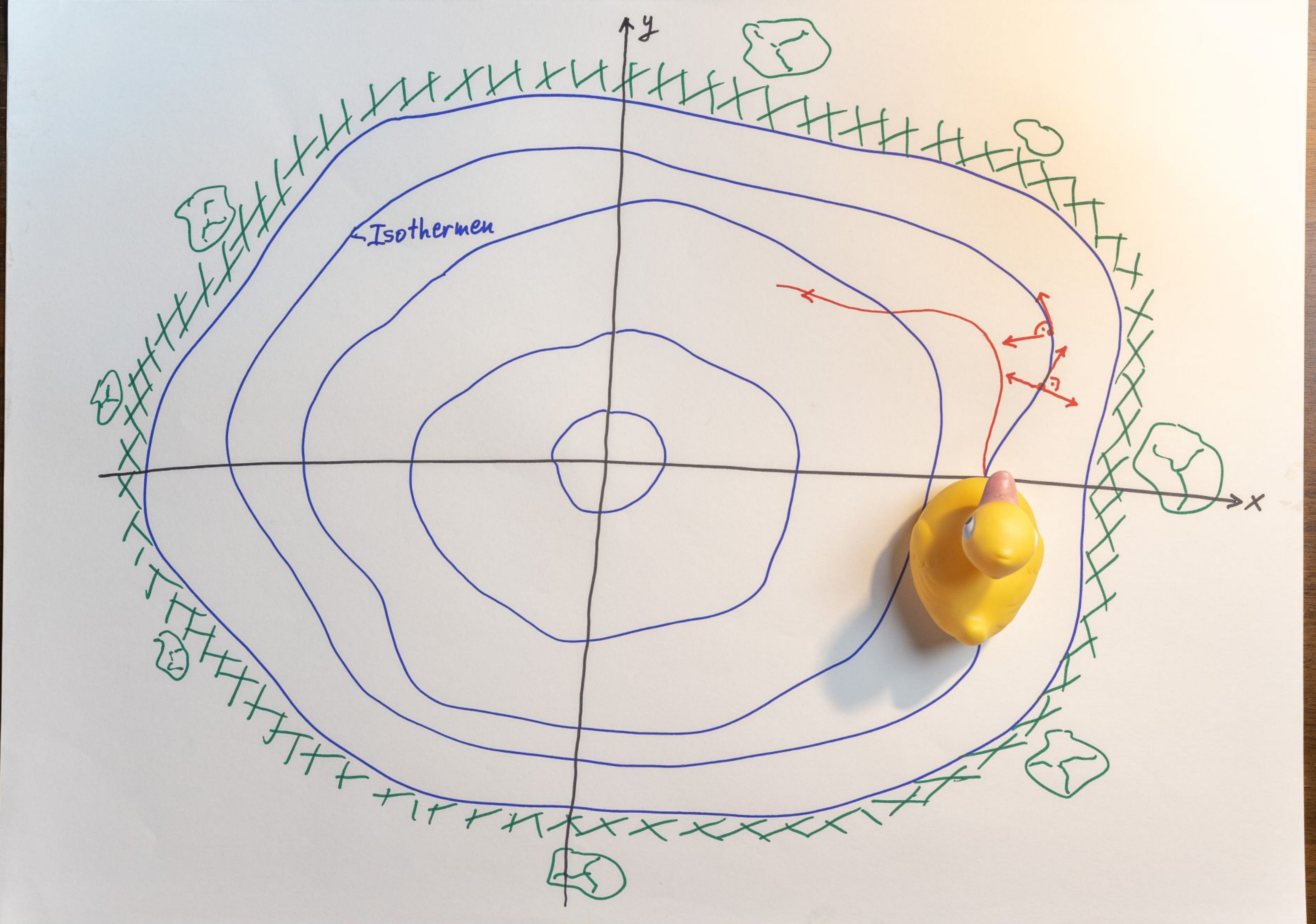
Reisegleichung: $\frac{dz}{dt} = y \cdot \cos(xy) \cdot 2t + x \cdot \cos(xy) \cdot 3t^2$

$= (2ty + 3t^2 x)\cos(xy)$

$= (2t \cdot t^3 + 3t^2 \cdot t^2)\cos(t^5)$

$= \underline{5t^4 \cos(t^5)}$

b) $z = x(t) \cdot y(t)$ $\qquad \frac{dz}{dt} = y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}$ Produktregel


y
x
Isothermen

Beispiele für die Berechnung partieller Ableitungen

Keine neuen Rechenregeln !

a) $z = f(x,y) = x^3 y + x y^2 + x + y^2 + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y^2 + 1 \quad , \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2xy + 2y$$

b) $z = f(x,y) = \dfrac{x}{x+y}$ (Quotientenregel)

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x+y) - x}{(x+y)^2} = \frac{y}{(x+y)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{(x+y)^2}$$

Zweite Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv z_{xx} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv z_{yy}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv z_{xy} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv z_{yx}$$

gemischte 2. Ableitung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \quad , \text{ Schwarz}$$

Vertauschbarkeit der gemischten 2. Ableitungen

zu b)

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{(x+y)^2 - y \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}$$

$$= \frac{x^2 + \cancel{2xy} + y^2 - \cancel{2xy} - 2y^2}{(x+y)^4} = \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^4}$$

$$= \underline{\underline{\frac{x-y}{(x+y)^3}}}$$

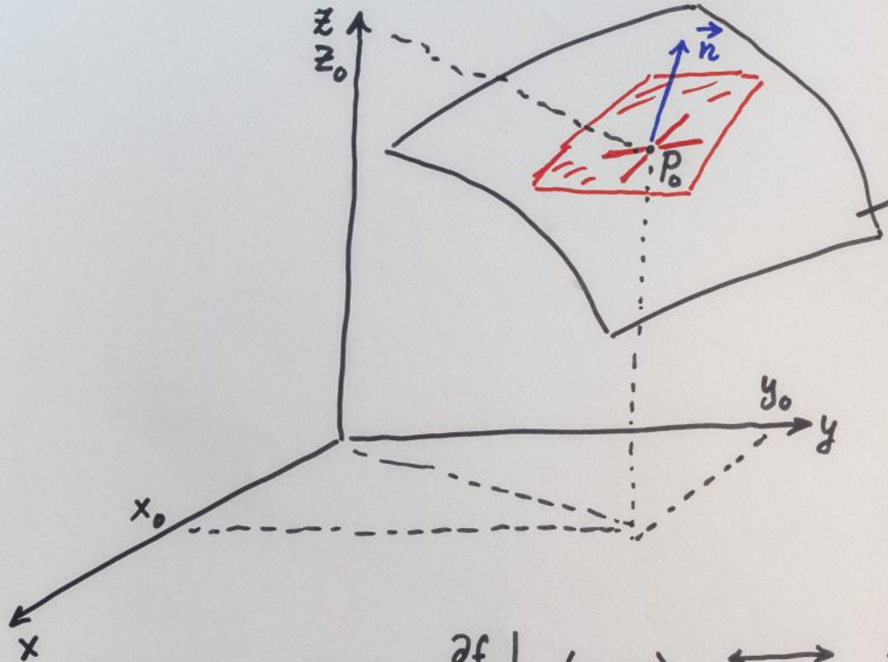
$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{-(x+y)^2 + x \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4}$$

$$= \frac{-x^2 - \cancel{2xy} - y^2 + 2x^2 + \cancel{2xy}}{(x+y)^4}$$

$$= \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^4} = \underline{\underline{\frac{x-y}{(x+y)^3}}}$$

Geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen.

Tangentialebene und Normalenvektor einer Fläche



Tangentialebene, aufgespannt von zwei Tangenten

Fläche $z = f(x,y)$

$\vec{n}$: Normalenvektor

Tangentialebene:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

$$n_1(x-x_0) + n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0$$

$x = x_0$: $\quad z = z_0 + \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \cdot (y-y_0) \quad \longleftrightarrow \quad x = x_0 : \; n_2(y-y_0) + n_3(z-z_0) = 0 \;\longrightarrow\; n_2 = -\left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0}, \quad n_3 = 1$

$y = y_0$: $\quad z = z_0 + \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \cdot (x-x_0) \quad \longleftrightarrow \quad y = y_0 : \; n_1(x-x_0) + n_3(z-z_0) = 0 \;\longrightarrow\; n_1 = -\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}, \quad n_3 = 1$

Normalen-vektor:

$$\vec{n} = -\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \cdot \vec{i} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \cdot \vec{j} + \vec{k}$$

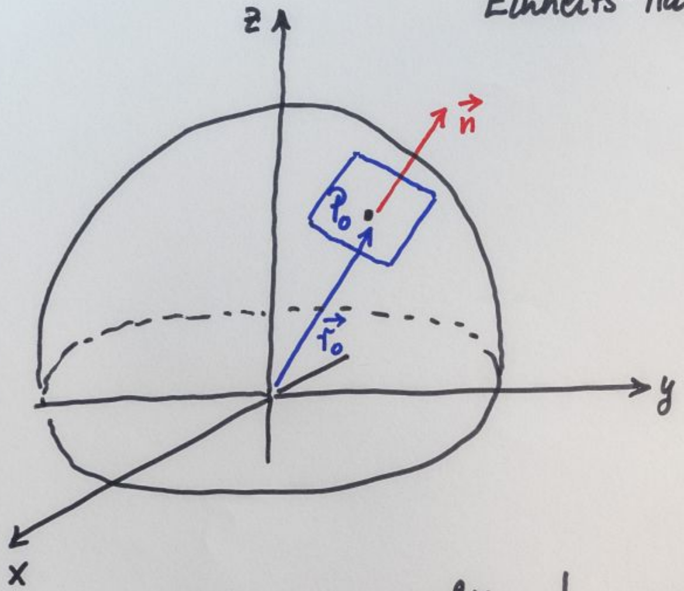
partielle Ableitungen: Komponenten des Normalenvektors in P_0

Tangentialebene: $\quad -\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \cdot (x-x_0) - \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \cdot (y-y_0) + (z-z_0) = 0$

$$\left(-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} \cdot \vec{i} - \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} \cdot \vec{j} + \vec{k}\right) \cdot \left((x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}\right) = 0$$

Beispiel: $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

Einheits-Halbkugel



$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0} = \frac{1}{2}\left.\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right|_{P_0} = -\frac{x_0}{z_0}$$

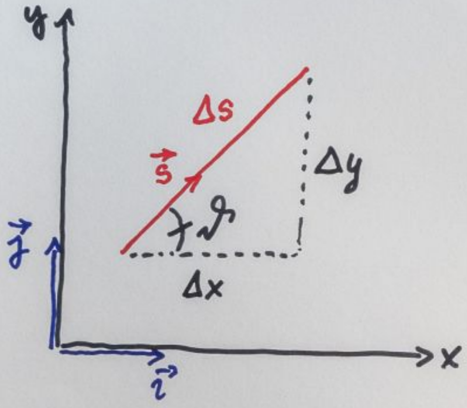
$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{P_0} = -\frac{y_0}{z_0}$$

Resultat: $\vec{n} = \frac{x_0}{z_0}\vec{i} + \frac{y_0}{z_0}\vec{j} + \vec{k} \quad \Big| \cdot z_0$

$$\rightarrow \vec{n}' = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = \vec{r}_0$$

Richtungsableitung. Gradient

$z = f(x,y)$



$$\vec{s} = \cos\vartheta\,\vec{i} + \sin\vartheta\,\vec{j}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y \quad \Big|\cdot\frac{1}{\Delta s}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} \approx \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\vartheta$$

Richtungsableitung: $$\underline{\frac{dz}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta}$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)\left(\cos\vartheta\,\vec{i} + \sin\vartheta\,\vec{j}\right)$$

a) $\vartheta = 0$: $\quad \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\partial f}{\partial x}$

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $\quad \dfrac{dz}{ds} = \dfrac{\partial f}{\partial y}$

b) Höhenlinien? $\quad \dfrac{dz}{ds} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta_h + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta_h = 0$$

$$\underline{\tan\vartheta_h = -\frac{f_x}{f_y}}$$

c) Anstieg maximal?

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

$$-f_x\sin\vartheta_m + f_y\cos\vartheta_m = 0$$

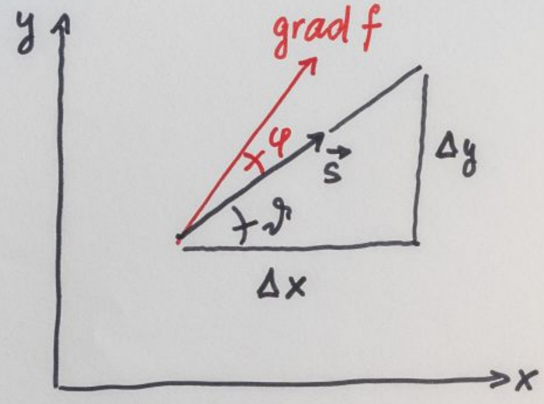
$$\underline{\tan\vartheta_m = \frac{f_y}{f_x}}$$

$$\tan\vartheta_h\cdot\tan\vartheta_m = -1$$

Richtung des steilsten Anstiegs senkrecht auf Höhenlinien

d) $$\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right)\left(\cos\vartheta\,\vec{i} + \sin\vartheta\,\vec{j}\right)$$

$$= \left|\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}\right| \cdot \cos\varphi$$



Anstieg: $\frac{dz}{ds} > 0$, für $\varphi = 0$ maximal

Abfall: $\frac{dz}{ds} < 0$, für $\varphi = \pi$ – " –

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}, \quad \text{Gradient}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$\longrightarrow$ nicht jeder Vektor ist Gradient! $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x} \; ?$$

Richtungsableitung: $\frac{dz}{ds} = \vec{s} \cdot \text{grad } f$

Reisegleichung: $\frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \text{grad } T$

Differenzen und Differentiale

unabhängige Variable $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$

abhängige Variable $\Delta f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$, vollständiges (totales) Differential

$$df = \operatorname{grad} f \cdot d\vec{r}$$ $\quad d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j}$

$A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$ vollständig ?

vollständig: $A(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $B(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}$ $\Big\}$ $\underline{\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}}$, Vertauschbarkeit der 2. Ableitungen von f

Integrabilitätsbedingung

Beispiele für den Gradienten und die Reisegleichung

$$\operatorname{grad} f(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

a) $z = f(x,y) = \dfrac{x^2}{10} + \dfrac{y^2}{6}$

$$\operatorname{grad} f = \frac{x}{5}\vec{i} + \frac{y}{3}\vec{j}$$

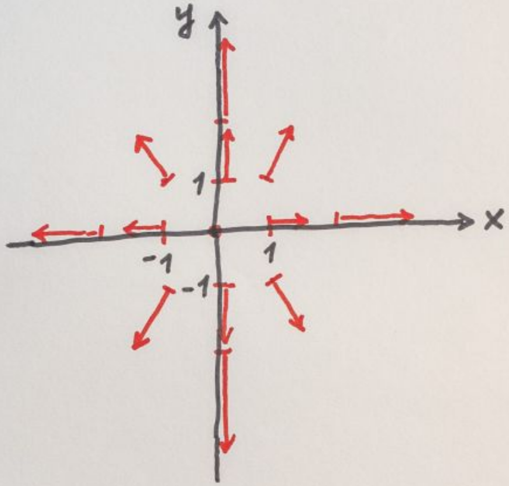
Gradientenfeld:

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(0,0)} = \vec{0}$$

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(x,0)} = \frac{x}{5}\vec{i}$$

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(0,y)} = \frac{y}{3}\vec{j}$$

$$\operatorname{grad} f\Big|_{(1,1)} = \frac{1}{5}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}$$



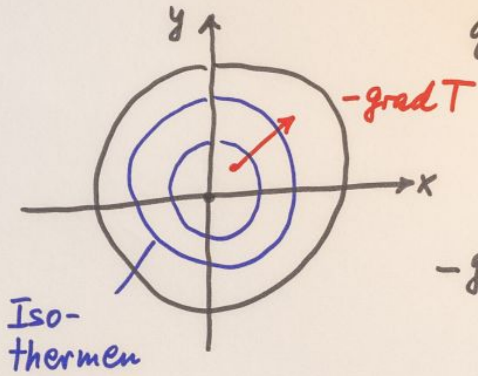
b) $\vec{v} = \dfrac{y}{2}\vec{i} - \dfrac{x}{2}\vec{j}$, kein Gradient

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

c) Temperaturverteilung auf einer Herdplatte

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{T_0}{r}, \quad r \neq 0$$

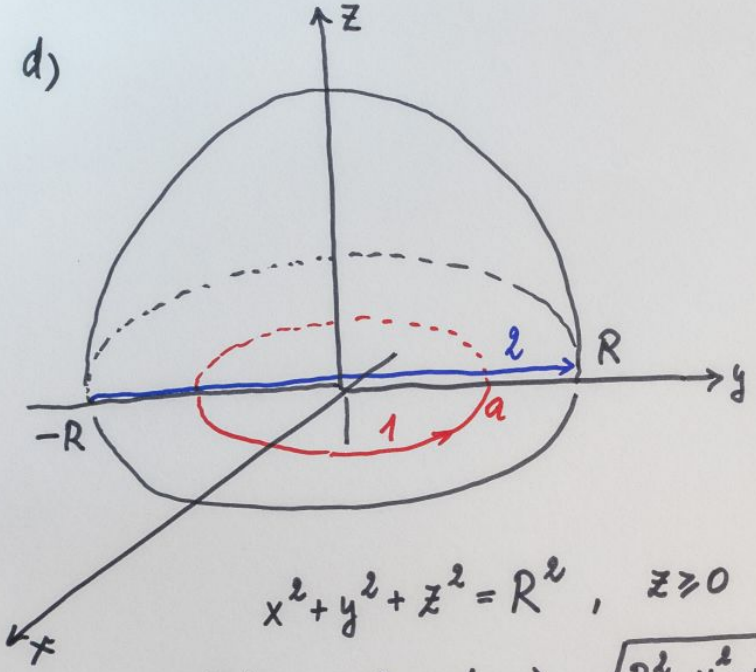


$$\operatorname{grad} T = -\frac{T_0}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j})$$

$$= -\frac{T_0}{r^3}\vec{r}$$

$$-\operatorname{grad} T = \frac{T_0}{r^3}\vec{r}$$

d)



$$x^2+y^2+z^2=R^2\ ,\quad z\geq 0$$

Höhe: $\quad h = z(x,y) = \sqrt{R^2-x^2-y^2}$

Höhenlinien: $\quad h = h_0 = \text{const}$

$$x^2+y^2 = R^2-h_0^2\ ,\quad h_0 \leq R$$

Kreise

$$\text{grad}\, h = \frac{-2x\,\vec{i}-2y\,\vec{j}}{2\sqrt{R^2-x^2-y^2}} = -\frac{x\,\vec{i}+y\,\vec{j}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

Reisegleichung: $\quad \dfrac{dh}{dt} = \vec{v}\cdot \text{grad}\, h$

1. Weg: Höhenlinie

Parametrisierung: $\quad \vec{r} = a\cos\omega t\cdot\vec{i} + a\sin\omega t\cdot\vec{j}$

$$\vec{v} = -a\omega\sin\omega t\cdot\vec{i} + a\omega\cos\omega t\cdot\vec{j}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{-a\omega\sin\omega t\cdot a\cos\omega t + a\omega\cos\omega t\cdot a\sin\omega t}{\sqrt{R^2-a^2(\cos^2\omega t+\sin^2\omega t)}} = 0$$

2. Weg:

Parametrisierung: $\quad x=0,\quad y = v_0 t - R\ ,\quad v_0 = \text{const}$

$$0\leq t\leq \frac{2R}{v_0}$$

$$\vec{v} = v_0\,\vec{j}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{v_0 y}{\sqrt{R^2-y^2}} = -\frac{v_0(v_0 t - R)}{\sqrt{R^2-(v_0^2t^2-2v_0Rt+R^2)}}$$

$$= \frac{v_0(R-v_0t)}{\sqrt{v_0t(2R-v_0t)}}$$

- $t=0,\ t=\dfrac{2R}{v_0}$: $\dfrac{dh}{dt}\to\infty$
- $t=\dfrac{R}{v_0}$: $\dfrac{dh}{dt}=0$
- $t\lessgtr\dfrac{R}{v_0}$: $\dfrac{dh}{dt}\gtrless 0$

Gradient in drei Dimensionen

Bisher: Fläche $z = f(x,y)$

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}$$

senkrecht auf Niveau<u>linien</u> $f(x,y) = \text{const}$

Jetzt: $g(x,y,z) = z - f(x,y)$

$$\underline{\operatorname{grad} g} = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}$$

$$= \underline{-\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \vec{k}}$$

$g(x,y,z) \overset{!}{=} \text{const}$ → Niveau<u>flächen</u>

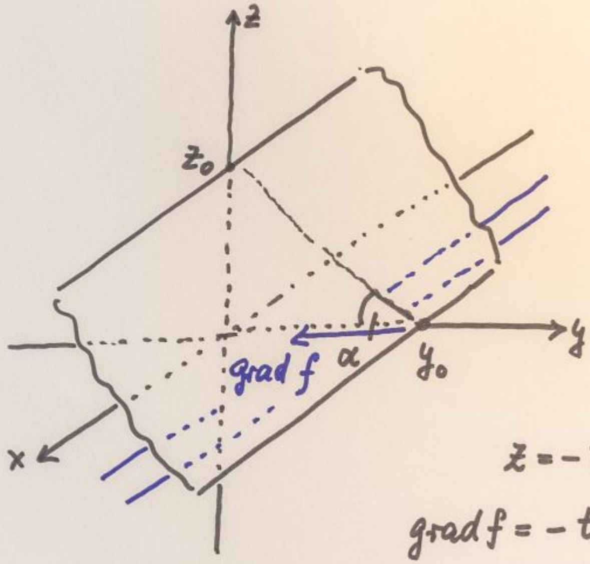
$$\underline{\vec{n} = \operatorname{grad} g}$$

grad g senkrecht auf Niveauflächen $g(x,y,z) = \text{const}$

Tangentialebene $(\vec{r} - \vec{r}_0)\operatorname{grad} g = 0$

Zusammenhang: $\underline{\operatorname{grad} g = -\operatorname{grad} f + \vec{k}}$

Beispiel: Schiefe Ebene



Achsenabschnitts-gleichung

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1$$

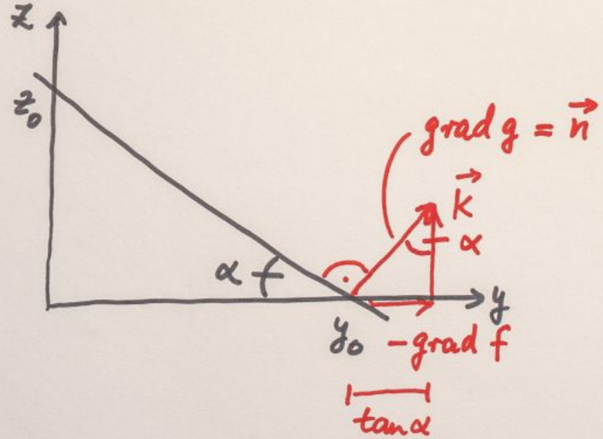
$$z = -\frac{z_0}{y_0}y + z_0$$

$$z = -\tan\alpha \cdot y + z_0 = f(x,y)$$

$\operatorname{grad} f = -\tan\alpha \cdot \vec{j}$, unabhängig von x und y

$$g(x,y,z) = z - f(x,y) = z - z_0 + \tan\alpha \cdot y$$

$$\operatorname{grad} g = \tan\alpha \cdot \vec{j} + \vec{k}$$



besonders wichtige Gradienten

$$\operatorname{grad} r = \operatorname{grad} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{r}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \frac{\vec{r}}{r} \quad , \quad |\operatorname{grad} r| = 1$$

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = \operatorname{grad} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{1}{r^3}\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(-\frac{\vec{r}}{r}\right) \quad , \quad \left|\operatorname{grad} \frac{1}{r}\right| = \frac{1}{r^2}$$