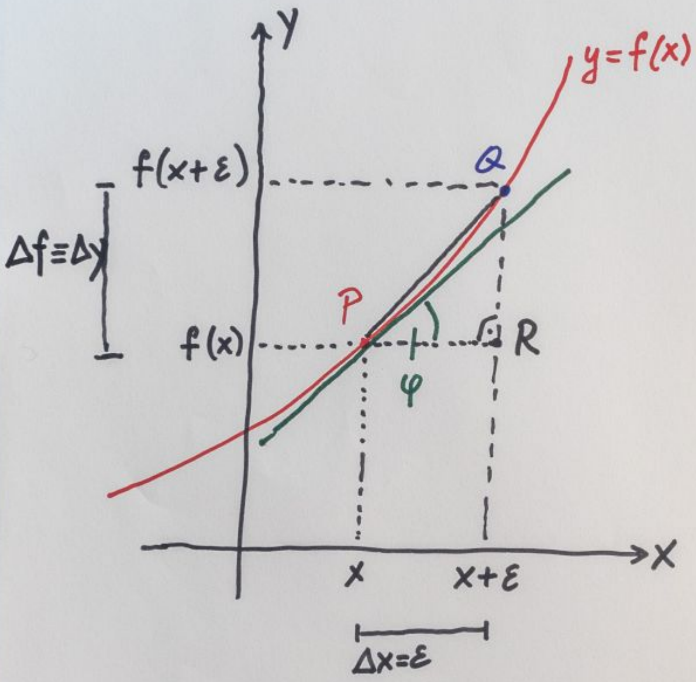
Differentialrechnung mit einer Variablen

Die Ableitung: Bezeichnungen, Definition und geometrische Bedeutung



Tangente in $P(x, y)$

$\overline{PQ}$: Sekante

ΔPRQ : Steigungsdreieck

$\dfrac{|\overline{RQ}|}{|\overline{PR}|}$: Anstieg

$$\frac{|\overline{RQ}|}{|\overline{PR}|} = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{(x+\varepsilon) - x} = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad , \text{ Differenzenquotient}$$

$f(x)$ stetig!

$$\tan\varphi = \lim_{\substack{\varepsilon \to 0 \\ (Q \to P)}} \frac{|\overline{RQ}|}{|\overline{PR}|} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = f'(x) \quad \text{1. Ableitung}$$

$\tan\varphi$: Anstieg der Tangente in P

Bezeichnungen: $\quad y' = f'(x) = f^{(1)}(x)$

Leibniz $\quad \displaystyle \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x)$ $\quad$ Differentialquotient

Differentialrechnung mit einer Variablen

Die Ableitung ... – Teil 2

Zeit als Variable: t

$$\frac{d}{dt} f(t) \equiv \dot{f}(t)$$

Beispiel: Bahnkurve $x = x(t)$

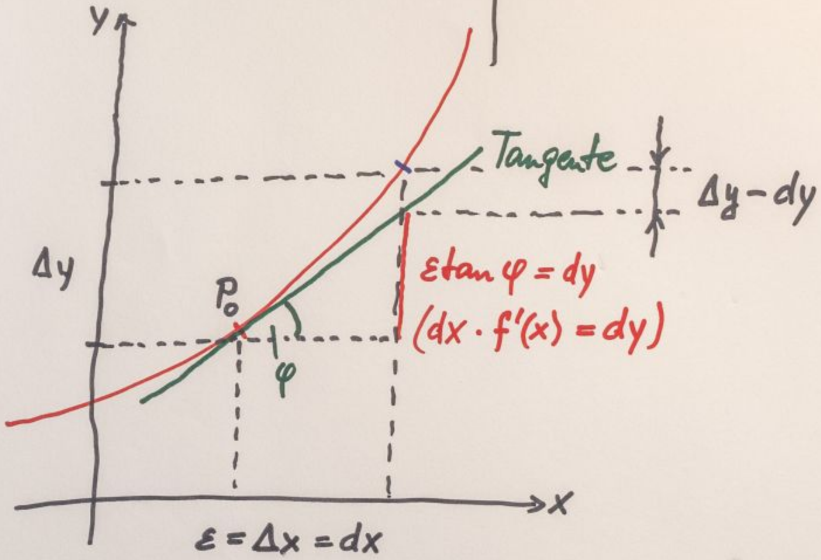
Durchschnittsgeschwindigkeit in Δt: $\bar{v} = \dfrac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}$

Momentangeschwindigkeit $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$

spezieller Punkt $P_0(x_0, y_0)$

$$\boxed{f'(x_0) = y'\Big|_{x=x_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0}}$$

Differenzen und Differentiale



$\varepsilon = \Delta x = dx$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\Delta y - dy}{\varepsilon} = 0$$

Gleichung der Tangente

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$$

lineare Approximation der Funktion in P_0

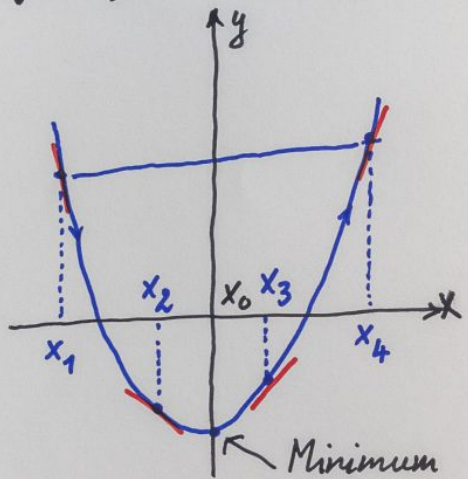
$$\left.\begin{aligned} \Delta y &= f'(x_0) \cdot \Delta x \\ dy &= f'(x_0) \cdot dx \end{aligned}\right\} \text{Fehlerfortpflanzungsgesetz}$$

Differentialrechnung mit einer Variablen

Die zweite Ableitung

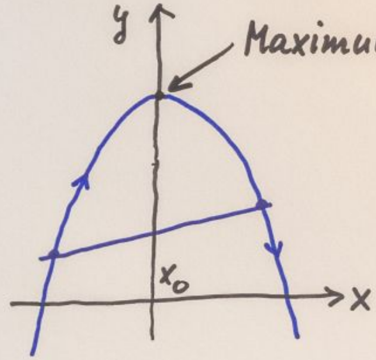
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = y''(x) \equiv \frac{d^2y}{dx^2}$$

Umgebung eines Minimums (x_0): $y''(x_0) > 0$



- Graph unterhalb der Verbindungslinie zweier Punkte
- Linkskurve
- konkav von oben

Umgebung eines Maximums (x_0): $y''(x_0) < 0$



- Graph oberhalb der Verbindungslinie zweier Punkte
- Rechtskurve
- konvex von oben

$x < x_0$: $\left.\begin{aligned} x_1 &= -|x_1| \\ x_2 &= -|x_2| \end{aligned}\right\} |x_1| > |x_2|$

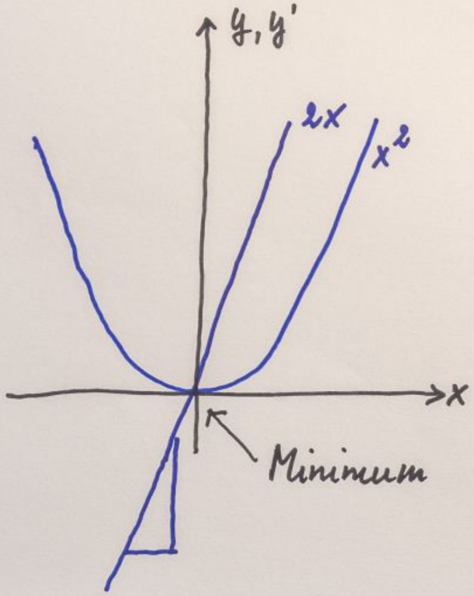
$y' < 0$: $\left.\begin{aligned} y_1' &= -|y_1'| \\ y_2' &= -|y_2'| \end{aligned}\right\} |y_1'| > |y_2'|$

2. Ableitung: $\dfrac{y_2' - y_1'}{x_2 - x_1} = \dfrac{|y_1'| - |y_2'|}{|x_1| - |x_2|} > 0$

$x > x_0$: $x_4 > x_3$

$y' > 0$: $y_4' > y_3'$

$$\frac{y_4' - y_3'}{x_4 - x_3} > 0$$



$y = x^2$

$y' = 2x$

Zur Leibniz-Notation $\frac{d^2y}{dx^2}$

Beispiel: Freier Fall

zweite Differenzenfolge konstant

Ansatz: $s_n = b\,(n\cdot\Delta t)^2$, $b = \text{const}$

1. Differenzenfolge: $\Delta s_n = s_{n+1} - s_n = b\left[(n+1)\Delta t\right]^2 - b\,(n\cdot\Delta t)^2$

$$= b\left[\cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2}\right](\Delta t)^2$$

$$= b\cdot(2n+1)\,(\Delta t)^2$$

2. Differenzenfolge: $\Delta(\Delta s_n) \equiv \Delta^2 s_n = \Delta s_{n+1} - \Delta s_n = s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n$

$$= b\left[(n+2)\Delta t\right]^2 - 2b\left[(n+1)\Delta t\right]^2 + b\,(n\cdot\Delta t)^2$$

$$= b\left[\cancel{n^2} + \cancel{4n} + 4 - 2\left(\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1\right) + \cancel{n^2}\right](\Delta t)^2$$

$$= 2b\,(\Delta t)^2 = \text{const} \neq 0$$

$$\frac{\Delta^2 s_n}{(\Delta t)^2} = 2b \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{d^2 s}{(dt)^2} \equiv \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta t &= \frac{1}{30}\,s \\ \Delta^2 s_n &\approx 1{,}1\,\text{cm} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\Delta^2 s_n}{(\Delta t)^2} \approx 990\,\frac{\text{cm}}{s^2}$$

$$2b \approx 9{,}9\,\frac{m}{s^2} \approx g \quad \left(= 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)$$

Differentialrechnung mit einer Variablen

Grenzwerte und Ableitungen

$$y' = f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \frac{dy}{dx}$$

a) $y = C = \text{const}$, $y' = 0$

b) $y = ax + b$

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{[a(x+\varepsilon)+b] - [ax+b]}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{a\varepsilon}{\varepsilon} = a$$

c) $y = x^2$

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{\varepsilon}(2x+\varepsilon)}{\cancel{\varepsilon}} = 2x$$

d) $y = \sqrt{x}$
$= x^{1/2}$

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\sqrt{x+\varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}} \right)$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cancel{\varepsilon}\, 1}{\cancel{\varepsilon}\left(\sqrt{x+\varepsilon} + \sqrt{x}\right)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2} x^{-1/2}$$

e) Exponentialfunktion

$y = e^x$, $y' = e^x$

$y = e^{-x}$

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-(x+\varepsilon)} - e^{-x}}{\varepsilon} = e^{-x} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{-\varepsilon} - 1}{\varepsilon}$$

$$= e^{-x} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{1}{e^{\varepsilon}} \cdot \frac{1 - e^{\varepsilon}}{\varepsilon} \right)$$

$$= e^{-x} \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{e^{\varepsilon}}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{\varepsilon}}{\varepsilon}}$$

$$e \approx (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$e^{\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon$$

$$e^{\varepsilon} - 1 \approx \varepsilon$$

$$\frac{e^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \approx 1 , \quad \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{e^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = 1$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1 - e^{\varepsilon}}{\varepsilon} = -1$$

$$= -e^{-x}$$

$y = \sinh x$ $\quad y' = \cosh x$

$y = \cosh x$ $\quad y' = \sinh x$

Differentialrechnung mit einer Variablen

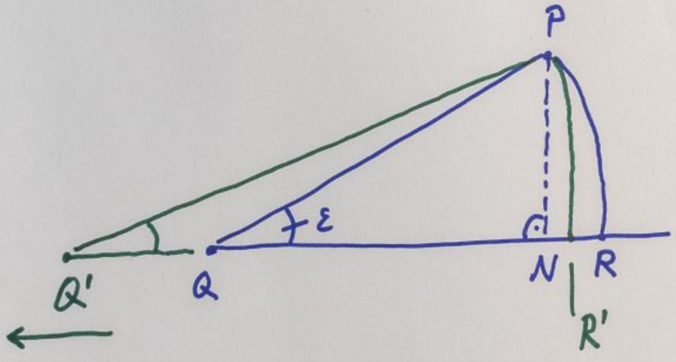
Grenzwerte und Ableitungen – Teil 2

f) $y = \sin x$

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin(x+\varepsilon) - \sin x}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(\sin x \cos\varepsilon + \cos x \sin\varepsilon) - \sin x}{\varepsilon}$$ (Additionstheoreme)

$$= \sin x \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} + \cos x \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \longrightarrow y' = \cos x$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} \;?$$



$$\left.\begin{aligned} \sin\varepsilon &= \frac{|\overline{PN}|}{|\overline{PQ}|} \\ \overset{\frown}{PR} &= \varepsilon \cdot |\overline{PQ}| \end{aligned}\right\} \quad \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{|\overline{PN}|}{\cancel{|\overline{PQ}|}} \cdot \frac{\cancel{|\overline{PQ}|}}{\overset{\frown}{PR}} = \frac{|\overline{PN}|}{\overset{\frown}{PR}}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{|\overline{PN}|}{\overset{\frown}{PR}} = 1$$

$$\underline{\underline{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 1}}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\frac{\cos\varepsilon - 1}{\varepsilon} \cdot \frac{\cos\varepsilon + 1}{\cos\varepsilon + 1} \right) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\cos^2\varepsilon - 1}{\varepsilon(\cos\varepsilon + 1)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{-\sin^2\varepsilon}{\varepsilon(\cos\varepsilon + 1)}$$

$$= -\underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}}_{1} \cdot \underbrace{\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon + 1}}_{0} = 0$$

g) $y = \cos x$

$$y' = -\sin x$$

Differentialrechnung mit einer Variablen

Differentiationsregeln und weitere Ableitungen

a) $y = a \cdot u(x) + b \cdot v(x)$, $a, b = \text{const}$

Linearkombination

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{[a\, u(x+\varepsilon) + b\, v(x+\varepsilon)] - [a\, u(x) + b\, v(x)]}{\varepsilon}$$

$$= a \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} + b \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v(x+\varepsilon) - v(x)}{\varepsilon}$$

$$= a\, u'(x) + b\, v'(x)$$

b) $y = u(x) \cdot v(x)$

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x+\varepsilon)\, v(x+\varepsilon) - u(x)\, v(x)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[u(x+\varepsilon) \cdot \frac{v(x+\varepsilon) - v(x)}{\varepsilon} + v(x) \cdot \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \right]$$

$$= u \cdot v' + v \cdot u'$$, Produktregel

Beispiel: $y = x^n$

$y = x^2 \to y' = 2x$

$y = x^{n-1} \to y' = (n-1)x^{n-2}$

$y = x^n \to y' = n x^{n-1}$?

$= x \cdot x^{n-1}$, $u(x) = x$, $v(x) = x^{n-1}$

$$y' = x \cdot (n-1)x^{n-2} + x^{n-1} \cdot 1$$

$$= x^{n-1}(n-1+1) = n x^{n-1}$$

Differentialrechnung mit einer Variablen

Differentiationsregeln und weitere Ableitungen – Teil 2

c) $y = \dfrac{1}{u(x)}$

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon}\left[\frac{1}{u(x+\varepsilon)} - \frac{1}{u(x)}\right] = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x) - u(x+\varepsilon)}{\varepsilon \cdot u(x+\varepsilon) \cdot u(x)}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (-1) \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{u(x+\varepsilon) \cdot u(x)}$$

$$= -u' \cdot \frac{1}{u^2} = -\frac{u'}{u^2}$$, Reziprokenregel

Beispiele:

- $y = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$, n ganz

  $u(x) = x^n$, $u' = n x^{n-1}$

  $$y' = -\frac{n x^{n-1}}{x^{2n}} = -n x^{-n-1}$$

- $y = e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$

  $u(x) = e^x$, $u' = e^x$

  $$y' = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}$$

d) $y = \dfrac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \dfrac{1}{v(x)}$

$$y' = u' \cdot \frac{1}{v} + u \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{u'}{v} - u \frac{v'}{v^2}$$

Produkt- und Reziprokenregel

$$= \frac{u'v - uv'}{v^2}$$, Quotientenregel

Beispiele:

- $y = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\quad u = \sin x \quad v = \cos x$

  $\quad u' = \cos x \quad v' = -\sin x$

  $$y' = \frac{\cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

- $y = \cot x = \dfrac{1}{\tan x}$, $u = \tan x$

  $u' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

  $$y' = -\frac{1}{\cos^2 x \cdot \tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Differentialrechnung mit einer Variablen

Differentiationsregeln und weitere Ableitungen – Teil 3

e) $y = y(u)$ mit $u = u(x)$

$= y[u(x)]$ „Funktion einer Funktion"

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$= \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$, Kettenregel

Beispiel: $y = a^x = e^{x \cdot \ln a} = e^u$, $u = x \cdot \ln a$

$$\frac{dy}{du} = e^u = e^{x \cdot \ln a} = a^x \quad , \quad \frac{du}{dx} = \ln a$$

$$y' = a^x \cdot \ln a$$

Differentialrechnung mit einer Variablen

Implizites Differenzieren

Beispiel:

a) $y = \ln x$, Umkehrfunktion $y = e^x$,

$x = e^y$ implizit

1. Schritt: $\frac{d}{dx}$

L.H.S. $\frac{dx}{dx} = 1$

R.H.S. $\frac{de^y}{dx} = \frac{de^y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = e^y \cdot \frac{dy}{dx}$

$$1 = e^y \frac{dy}{dx}$$

2. Schritt: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$

3. Schritt: $\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}}$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$

aber auch: $\frac{dx}{dy} = e^y$, $\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = e^{-y} = \frac{1}{x}$

b) $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

$x = y^n$

1. Schritt: $1 = n y^{n-1} \cdot y'$

2. Schritt: $y' = \frac{1}{n y^{n-1}}$

3. Schritt: $y' = \frac{1}{n x^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{1}{n x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

aber auch: $\frac{dx}{dy} = n y^{n-1}$

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{n} y^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}(1-n)} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = y'$$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$, Umkehrregel

c) $y = \log_a x$ $\quad x = a^y$, $\frac{dx}{dy} = a^y \ln a = x \cdot \ln a$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$

Differentialrechnung mit einer Variablen

Implizites Differenzieren

d) $y = \arcsin x$

$$x = \sin y$$

$$\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

e) Logarithmische Ableitung

Beispiele: e1) $y = x^x$

$$\ln y = x \cdot \ln x \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$$

$$y' = y \cdot (\ln x + 1)$$

$$= x^x \cdot (\ln x + 1)$$

e2) $y = u \cdot v$

$$\ln y = \ln u + \ln v \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{1}{u} \cdot u' + \frac{1}{v} \cdot v'$$

$$y' = y\left(\frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}\right) = u'v + uv'$$, Produktregel

e3) $y = x^n$

$$\ln y = n \cdot \ln x \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$

$$y' = y\,\frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = n \cdot x^{n-1}$$

e4) $y = a^x$

$$\ln y = x \cdot \ln a \quad \left| \frac{d}{dx} \right.$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a$$

$$y' = y \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$