Integralrechnung

Integration als Umkehrung der Differentiation.

Das unbestimmte Integral

Frage: Wie heißt Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x) = F'(x)$ gegeben ist?

Beispiel: Von welcher Funktion $F(x)$ ist $f(x) = x^4 + 6$ die Ableitung?

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dx} x^5 = 5x^4 \longrightarrow \text{Faktor } \frac{1}{5}\,! \\ &\frac{d}{dx}(6x) = 6 \end{aligned}\right\} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{5}x^5 + 6x\right) = x^4 + 6$$

$$\underline{\underline{F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 6x + C}} \quad , \quad C = \text{const}$$

- Funktion
- nicht eindeutig!

Bezeichnungen: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ „unbestimmtes Integral"

$$F'(x) = f(x)$$

$$\frac{d}{dx}\int f(x)\,dx = f(x) \quad \text{„Anti-Differentiation"}$$

$f(x)$: Integrand, „unter Integral"

$F(x)$: Stammfunktion

Verallgemeinerung des Beispiels

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad ; \quad n \neq -1$$

denn:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C\right) = \frac{1}{\cancel{n+1}}\,(\cancel{n+1})\,x^{(n+1)-1}$$

$$= x^n$$