Lineare Approximation und Fehlerfortpflanzung

a) eine Variable : $y = f(x)$

Taylor-Polynom 1. Ordnung, lineare Approximation

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

$$dy = f'(x_0) \cdot dx \longrightarrow \underline{\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x} \qquad (*)$$

Beispiel : Volumen einer Kugel $V = \frac{4\pi}{3} r^3$

Änderung $\Delta r \longrightarrow$

$$\Delta V = \frac{dV}{dr} \cdot \Delta r \qquad \text{(absoluter „Fehler")}$$

$$= 4\pi r^2 \cdot \Delta r$$

Oberfläche — Dicke der Kugelschale $r \to r + \Delta r$

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta r}{r} \qquad \text{(relativer „Fehler")}$$

b) zwei Variable : $z = f(x, y)$

Tangente $\longrightarrow$ Tangentialebene

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

$$\underline{\Delta z = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y} \qquad (**)$$

$(*)$, $(**)$: Fehlerfortpflanzungs-Gesetz

Beispiel : Messung der Schwerebeschleunigung g durch <u>kleine</u> Pendelschwingungen

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \longrightarrow g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}$$

$$\Delta g = \frac{\partial g}{\partial l} \Delta l + \frac{\partial g}{\partial T} \Delta T$$

$$= 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} \Delta l - 2 \frac{l}{T^3} \Delta T \right)$$

$$= g \left(\frac{\Delta l}{l} - 2 \frac{\Delta T}{T} \right)$$

relativer Größtfehler : $\frac{\Delta g}{g} = \left| \frac{\Delta l}{l} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right|$