

Rechnen mit kleinen Größen

Vorbereitende Beispiele

$$\frac{v}{c} \ll 1, \quad v: \text{Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne}$$
$$v \approx 30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$c: \text{Lichtgeschwindigkeit}$$
$$c \approx 300\,000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$$

$$\frac{v}{c} = 10^{-4} \ll 1$$

Spezielle Relativitätstheorie:

$$\text{Lorentz-Faktor } \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \longrightarrow$$

$$\text{a) } (1 \pm x)^2 = 1 \pm 2x + x^2, \quad x = 10^{-4} \ll 1$$
$$\approx \underline{\underline{1 \pm 2x}} \quad x^2 = 10^{-8} \ll 2x$$

$$\text{b) } \sqrt{1 \pm x} \equiv y$$

$$y^2 = 1 \pm x$$

$$\approx 1 \pm x + \frac{x^2}{4} = \left(1 \pm \frac{x}{2}\right)^2$$

$$y \approx 1 \pm \frac{x}{2}, \quad \sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2} \quad \parallel$$

$$\text{c) } \frac{1}{1 \pm x} : \quad 1 : (1 \pm x) = 1 \mp x + x^2 - + \dots$$
$$\frac{-(1 \pm x)}{\mp x}$$
$$\frac{-(-\mp x - x^2)}{x^2}$$
$$\vdots$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x}}$$

$$\text{d) } \frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = \frac{1}{y} \approx \frac{1}{1 \pm \frac{x}{2}} \approx \underline{\underline{1 \mp \frac{x}{2}}}$$

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$