Differentialrechnung mit einer Variablen

Differentiationsregeln und weitere Ableitungen

a) $y = a \cdot u(x) + b \cdot v(x)$, $a, b = \text{const}$

Linearkombination

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{[a\, u(x+\varepsilon) + b\, v(x+\varepsilon)] - [a\, u(x) + b\, v(x)]}{\varepsilon}$$

$$= a \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} + b \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{v(x+\varepsilon) - v(x)}{\varepsilon}$$

$$= a\, u'(x) + b\, v'(x)$$

b) $y = u(x) \cdot v(x)$

$$y' = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{u(x+\varepsilon)\, v(x+\varepsilon) - u(x)\, v(x)}{\varepsilon}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \left[u(x+\varepsilon) \cdot \frac{v(x+\varepsilon) - v(x)}{\varepsilon} + v(x) \cdot \frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \right]$$

$$= u \cdot v' + v \cdot u'$$, Produktregel

Beispiel: $y = x^n$

$y = x^2 \rightarrow y' = 2x$

$y = x^{n-1} \rightarrow y' = (n-1)x^{n-2}$

$y = x^n \rightarrow y' = n x^{n-1}$?

$= x \cdot x^{n-1}$, $u(x) = x$, $v(x) = x^{n-1}$

$$y' = x \cdot (n-1)x^{n-2} + x^{n-1} \cdot 1$$

$$= x^{n-1}(n-1+1) = n x^{n-1}$$