Differentialrechnung mit einer Variablen

Implizites Differenzieren

Beispiel:

a) $y = \ln x$, Umkehrfunktion $y = e^x$,

$x = e^y$ implizit

1. Schritt: $\frac{d}{dx}$

L.H.S. $\frac{dx}{dx} = 1$

R.H.S. $\frac{de^y}{dx} = \frac{de^y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = e^y \cdot \frac{dy}{dx}$

$$1 = e^y \frac{dy}{dx}$$

2. Schritt: $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y}$

3. Schritt: $\underline{\underline{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}}}$ $\longrightarrow$ $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$

aber auch: $\frac{dx}{dy} = e^y$, $\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = e^{-y} = \frac{1}{x}$

b) $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$

$x = y^n$

1. Schritt: $1 = n y^{n-1} \cdot y'$

2. Schritt: $y' = \frac{1}{n y^{n-1}}$

3. Schritt: $y' = \frac{1}{n x^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{1}{n x^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

aber auch: $\frac{dx}{dy} = n y^{n-1}$

$$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)} = \frac{1}{n} y^{1-n} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}(1-n)} = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} = y'$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$, Umkehrregel

c) $y = \log_a x$ $\quad x = a^y$, $\frac{dx}{dy} = a^y \ln a = x \cdot \ln a$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln a}$$