Vektoralgebra

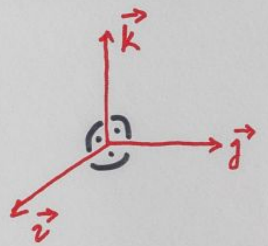
Skalarprodukt – Teil 2

– $\vec{a} = \vec{b}$, $\gamma = 0$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$$

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \text{ , Betrag}$$

Basis-Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



orthonormierte Basis

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

Multiplikationstabelle

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$$\vec{a}\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \cdot (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k}) \text{ , Distributivgesetz}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k} \quad \Big| \cdot \vec{i} \Big| \cdot \vec{j} \Big| \cdot \vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{i} &= a_1 \\ \vec{a} \cdot \vec{j} &= a_2 \\ \vec{a} \cdot \vec{k} &= a_3 \end{aligned}\right. \quad \text{Projektionen auf Basisvektoren}$$

$$\vec{a} = (\vec{a}\vec{i})\vec{i} + (\vec{a}\vec{j})\vec{j} + (\vec{a}\vec{k})\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} &\vec{a}\vec{i} = a\cos\alpha \rightarrow \cos\alpha = \frac{a_1}{a} \\ &\alpha = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{i}) \qquad \cos\beta = \frac{a_2}{a} \\ &\beta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{j}) \\ &\gamma = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{k}) \qquad \cos\gamma = \frac{a_3}{a} \end{aligned}\right\} \text{Richtungskosinus}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = 1$$

Anwendungsbeispiel: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, gesucht: orthogonaler Einheitsvektor in (x,y)-Ebene

$$\vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}\vec{n} &= n_1^2 + n_2^2 = 1 \\ \vec{n}\vec{a} &= n_1 a_1 + n_2 a_2 = 0 \end{aligned}\right\} \vec{n} = \mp \frac{a_2\vec{i} - a_1\vec{j}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$