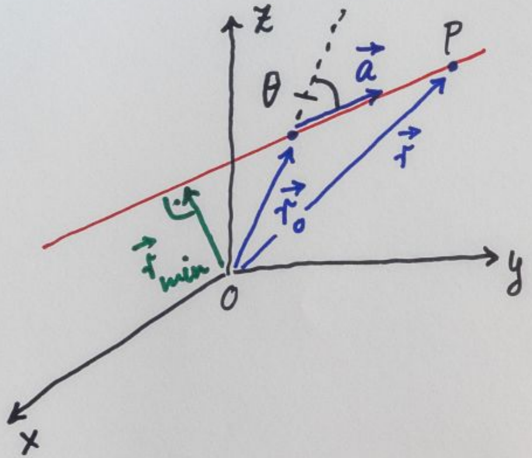
Vektoralgebra

Geometrische Anwendungen mit physikalischer Bedeutung

a) Bestimmung einer Geraden durch Punkt und Richtung



$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$, λ: Parameter

Parameterdarstellung der Geraden

$\vec{a}$: Richtungsvektor

Beispiel: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}$, geradlinig-gleichförmige Bewegung ($\vec{v} = \overrightarrow{const}$)

$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \lambda a_1 \\ y - y_0 &= \lambda a_2 \\ z - z_0 &= \lambda a_3 \end{aligned}\right\} \lambda = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Aufgabe: Kürzester Abstand der Geraden vom Koordinatenursprung?

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r} \cdot \vec{r}) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (*)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{d\lambda}\left[x^2(\lambda) + y^2(\lambda) + z^2(\lambda)\right]$$

$$= 2x\frac{dx}{d\lambda} + 2y\frac{dy}{d\lambda} + 2z\frac{dz}{d\lambda}$$

$$= 2\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{dx}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dy}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dz}{d\lambda}\vec{k}\right)$$

$$= 2\vec{r}\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \quad \text{, Produktregel}$$

für $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} \longrightarrow \dfrac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{a}$

mit $(*)$: $\vec{r} \cdot \vec{a} \stackrel{!}{=} 0$

$$\vec{r}\vec{a} = (\vec{r}_0 + \lambda\vec{a})\vec{a} = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{\vec{r}_0\vec{a}}{a^2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \frac{(\vec{r}_0\vec{a})}{a^2}\vec{a} = \vec{r}_{min}$$

$$r_{min}^2 = \vec{r}_{min} \cdot \vec{r}_{min} = \vec{r}_0\vec{r}_0 - \frac{1}{a^2}(\vec{r}_0\vec{a})^2$$

$$= r_0^2 - \frac{1}{a^2} r_0^2 a^2 \cos^2\theta = r_0^2(1 - \cos^2\theta)$$

$$= r_0^2 \sin^2\theta$$

$$r_{min} = r_0 \sin\theta = \left|\vec{r}_0 \times \frac{\vec{a}}{a}\right|$$