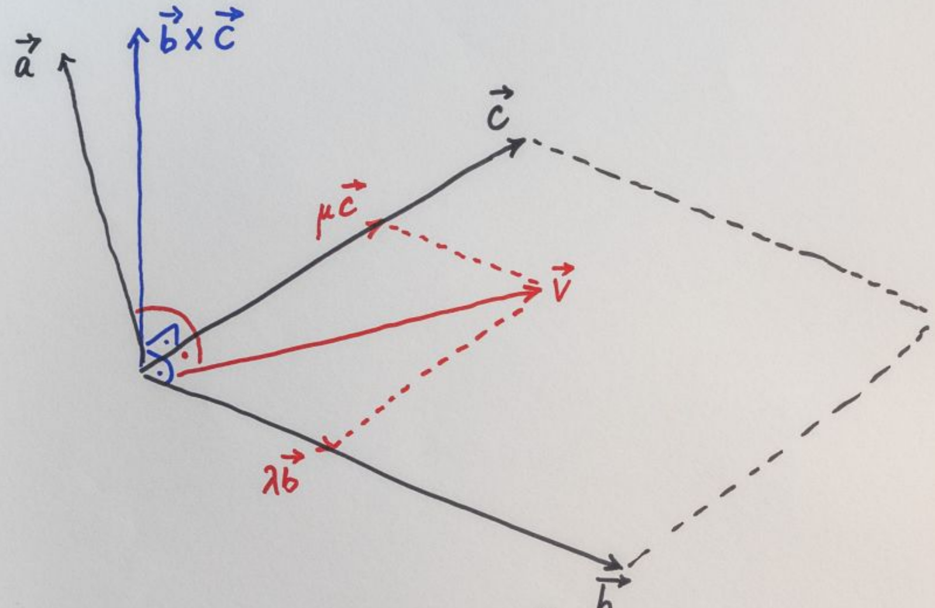
Mehrfachprodukte von Vektoren

a) doppeltes Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv \vec{v}$



– $\vec{v} \perp (\vec{b} \times \vec{c}) \rightarrow \vec{v}$ in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene

$\vec{v} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$

– $\vec{v} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{a}\vec{v} = 0$

$$\lambda \cdot \vec{a}\vec{b} + \mu \cdot \vec{a}\vec{c} = 0$$

erfüllbar durch $\lambda = \varkappa \cdot \vec{a}\vec{c}$, $\mu = -\varkappa \cdot \vec{a}\vec{b}$

$$\vec{v} = \varkappa\left[(\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}\right] \qquad (*)$$

Bestimmung von $\varkappa$:

Komponente v_1

$$v_1 = a_2(\vec{b} \times \vec{c})_3 - a_3(\vec{b} \times \vec{c})_2$$
$$= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)$$
$$= \underline{a_2b_1c_2} - \underline{a_2b_2c_1} - \underline{a_3b_3c_1} + a_3b_1c_3$$

nach (*):

$$v_1 = \varkappa\Big[(\cancel{a_1}c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (\cancel{a_1b_1} + a_2b_2 + a_3b_3)c_1\Big]$$
$$= \varkappa\left[\underline{a_2b_1c_2} + a_3b_1c_3 - \underline{a_2b_2c_1} - \underline{a_3b_3c_1}\right]$$

$\rightarrow \underline{\varkappa = 1}$

Resultat:

$$\underline{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}}$$

Entwicklungssatz