

Ellipse, Hyperbel und Parabel

... als ebene Schnitte durch gerade Kreiskegel

Karl-Heinz Lotze

Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln werden als Kegelschnitte bezeichnet. Die Lehrbuchliteratur führt aber in der Regel nicht vor, wie diese Figuren durch Schnitte eines geraden Kreis-Doppelkegels mit einer Ebene entstehen. Das zu zeigen, ist der Gegenstand dieses Aufsatzes.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Kegel und Schnittebene. Koordinatensysteme	3
3	Kreis und Ellipse	7
3.1	Der Fall $\gamma = \pi/2$	7
3.2	Der Fall $\alpha < \gamma < \pi/2$	7
3.3	Eigenschaften von Ellipsen, die durch parallele Schnittebenen entstehen . . .	11
4	Die Hyperbel	17
4.1	Der Fall $0 < \gamma < \alpha$	17
4.2	Der Fall $\gamma = 0$	22
5	Die Parabel	24
6	Punkt, Doppelgerade und Geradenpaar	26

1 Einleitung

In Kapitel 4 über Kegelschnitte unseres „Vorkurs Mathematik für Studienanfänger“ haben wir für Ellipse, Hyperbel und Parabel Definitionen gegeben, die mit den Worten „Die Ellipse (Hyperbel, Parabel) ist der geometrische Ort aller Punkte *der Ebene*, für die ...“ begannen. Aus diesen Definitionen haben wir die Mittelpunktsgleichungen und – im Fall der Parabel – die Scheitelgleichung hergeleitet. Dabei haben wir Begriffe wie Scheitelpunkte und Achsen, Brennpunkte und Exzentrizität sowie den (Halb-)Parameter eingeführt.

Diese Definitionen in der Ebene lassen nicht erkennen, warum diese Figuren „Kegelschnitte“ heißen und daß die Ebene die Schnittebene ist, die einen Kegel in verschiedenen Höhen und unter verschiedenen Winkeln schneidet. Dieser Zusammenhang wird in der Lehrbuchliteratur eher selten dargestellt. Eine sehr elegante, auf elementaren geometrischen Überlegungen beruhende Argumentation mit Hilfe der so genannten Dandelinschen Kugeln wird in [Willers 1965] und [Simmons 1996] gegeben.

Wir wenden hier die Methode der analytischen Geometrie an und stellen uns zwei Aufgaben:

- Für einen Kegel mit bestimmtem Öffnungswinkel geben wir die Höhe (Abstand von der Kegelspitze) und den Winkel vor, unter dem eine Ebene diesen Kegel schneidet. Wir zeigen analytisch, daß sich für die Schnittfigur eine Mittelpunkts- oder Scheitelgleichung ergibt, die eine Ellipse oder Hyperbel beziehungsweise eine Parabel beschreibt. Sodann drücken wir alle oben genannten Bestimmungsstücke der Schnittfiguren durch Schnitthöhe und -winkel aus.
- Wir geben die (Halb-)Achsen von Ellipse und Hyperbel oder den Scheitelabstand des Brennpunktes der Parabel vor und bestimmen für einen gegebenen Kegel die Schnitthöhe und den Schnittwinkel, mit denen sich genau diese Schnittfiguren ergeben. Dabei fragen wir auch, ob es Bedingungen für den Öffnungswinkel des Kegels gibt, um eine vorgegebene Schnittfigur überhaupt zu ermöglichen.

Dieser Aufsatz ist wie folgt gegliedert:

In **Kapitel 2** präsentieren wir die Gleichungen, die einen geraden Kreis-Doppelkegel und die Schnittebene beschreiben. Wir führen zwei Koordinatensysteme ein, die zum einen in der Kegelspitze und zum anderen in dem Punkt verankert sind, wo die Achse des Kegels die Schnittebene durchstößt. Die Zusammenführung von Kegel und Ebene führt in den Koordinaten der Ebene auf eine Gleichung für die Schnittfigur, die auch in eine Mittelpunktsgleichung für Ellipse und Hyperbel überführt werden kann, darüber hinaus aber für eine ganze Reihe weiterer Fälle diskutiert werden muß.

In **Kapitel 3** lösen wir die beiden oben genannten Aufgaben für die Ellipse und den Kreis als Spezialfall. Hauptsächlich für den Leser zum Zweck der Übung im Umgang mit Geraden- und Ebenengleichungen fügen wir einen Abschnitt über die Eigenschaften von Ellipsen hinzu, die durch parallele Schnittebenen entstehen.

Das **Kapitel 4** hat Hyperbeln einschließlich ihrer Asymptoten und möglicher Bedingungen für den Öffnungswinkel des Kegels zum Gegenstand.

In **Kapitel 5** behandeln wir die Parabel.

Schließlich diskutieren wir in **Kapitel 6** den Fall, daß die Ebene den Kegel in seiner Spitze schneidet. Es ergibt sich als Schnittfigur ein Geradenpaar, das bei Vergrößerung des Schnittwinkels zu einer Doppelgeraden und dann zu einem Punkt entartet.

Wir präsentieren dieses Thema als Anhang zu unserem „Vorkurs Mathematik für Studienanfänger“. Er enthält nichts an Voraussetzungen, was nicht in den Kapiteln 3 über Vektorrechnung und 4 über die Kegelschnitte in diesem Vorkurs geboten wird. Allerdings werden diese Voraussetzungen in einer einigermaßen virtuosen Weise benutzt, so daß wir den Inhalt dieses Aufsatzes nicht als Pflichtbestandteil dieses Vorkurses ansehen. Außerdem würde dies dem Thema „Kegelschnitte“ ein ungerechtfertigtes Übergewicht im Vergleich zu den anderen Themen geben. Und schließlich haben wir den Inhalt dieses Aufsatzes nie als Vorlesung oder in den Übungen behandelt. Er ist also interessierten Studenten als Zusatzmaterial zur Lektüre und Nacharbeit empfohlen, sobald sie sich die Inhalte der Kapitel 3 und 4 angeeignet haben.

Außerdem kann dieser Aufsatz als theoretische Grundlage zum Verständnis der von meinem Kollegen Thomas Kaiser produzierten Video-Animationen von Kegelschnitten gelesen werden.

2 Kegel und Schnittebene. Koordinatensysteme

Kegel Wir beschreiben den Kreis-Doppelkegel durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{c^2} + \frac{y^2}{c^2} = z^2. \quad (1)$$

Die Achse des Kegels ist also die z -Achse. Seine Spitze ist der Ursprung O des (x, y, z) -Koordinatensystems, das von den orthonormalen Basisvektoren \vec{i}, \vec{j} beziehungsweise \vec{k} aufgespannt wird. Wir nennen von nun an dieses Koordinatensystem das *Koordinatensystem des Kegels* (Abbildung 1). Ein beliebiger Punkt P im Raum hat in diesem Koordinatensystem den Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

In der Form

$$x^2 + y^2 = (cz)^2 \quad (2)$$

erkennen wir die Gleichung von Kreisen mit den kontinuierlich veränderlichen Radien $R = c|z|$. Denken wir uns diese Kreise übereinandergelegt, entsteht so der Doppelkegel. Sein halber Öffnungswinkel α ist durch

$$\tan \alpha = c, \quad \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \quad (3)$$

gegeben.

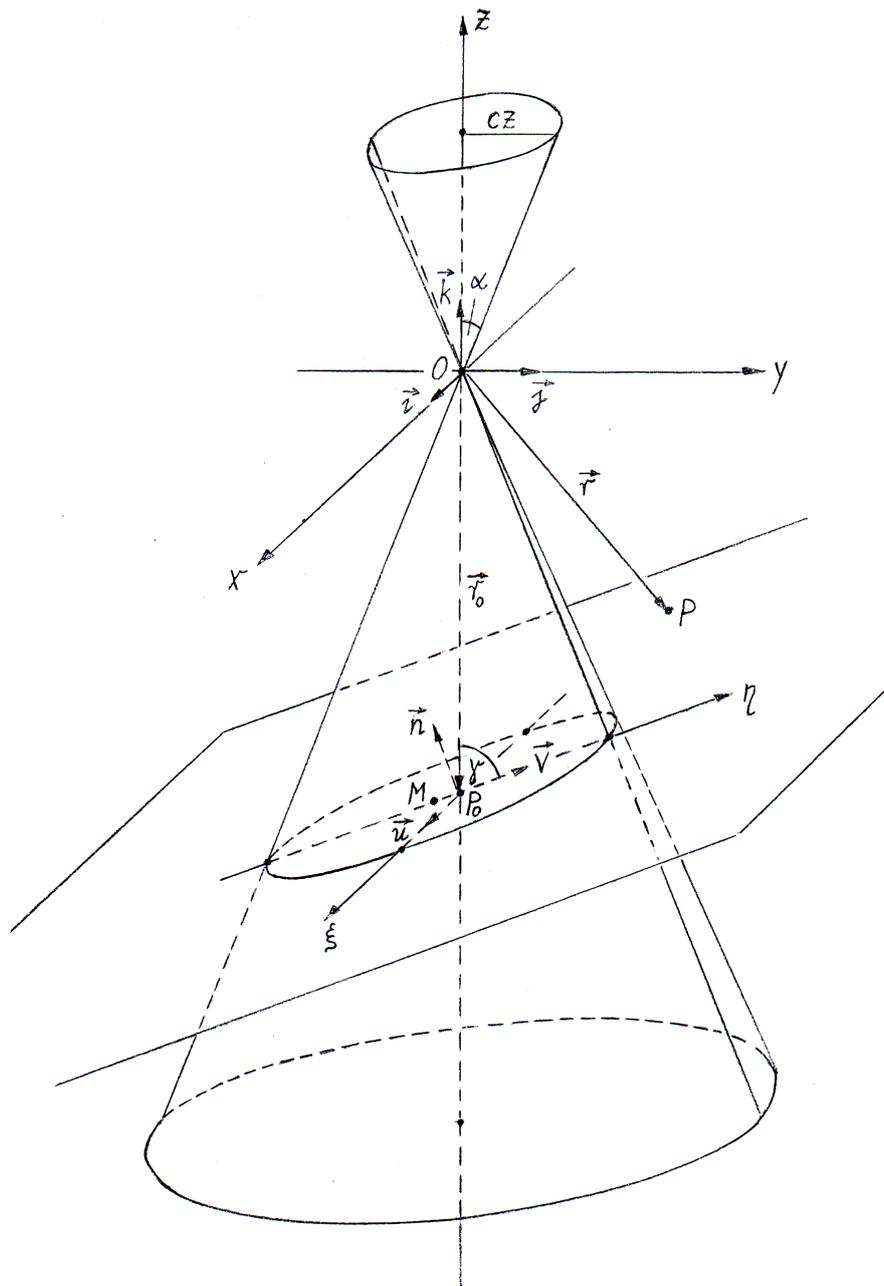


Abbildung 1: Schnitt eines geraden Kreiskegels durch eine Ebene in perspektivischer Darstellung. Es wird der Fall gezeigt, daß als Schnittfigur eine Ellipse entsteht. Die Abbildung dient hauptsächlich der Einführung von Koordinaten, (Basis-)Vektoren und besonderen Punkten. Insbesondere bedeuten α : halber Öffnungswinkel des Kegels, γ : Schnittwinkel von Ebene und Kegelachse, \vec{n} : Normalenvektor der Ebene, P_0 : Durchstoßpunkt der z -Achse durch die Schnittebene. Weitere Erläuterungen im Text.

Schnittebene Da es sich um einen Kreiskegel handelt, dürfen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Schnittebene so legen, daß sie die x -Achse nicht schneidet. Dann hat ihr Normalenvektor \vec{n} keine x -Komponente,

$$\vec{n} = n_2 \cdot \vec{j} + n_3 \cdot \vec{k},$$

und wenn er ein Einheitsvektor ist, haben wir obendrein

$$n_2 = -\sqrt{1 - n_3^2}$$

(Vorzeichen siehe Abbildung 1). Liegt der Punkt P in der Ebene und bezeichnet P_0 den Punkt, wo die z -Achse die Ebene durchstößt, $\vec{r}_0 = z_0 \vec{k}$, ist die Gleichung der Ebene unabhängig von x durch

$$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0) = -\sqrt{1 - n_3^2} \cdot y + n_3 \cdot (z - z_0) = 0 \quad (4)$$

gegeben. Diesen Punkt P_0 nehmen wir als Ursprung eines rechtshändigen Dreibeins, das aus den Basis-Einheitsvektoren \vec{u} , \vec{v} , \vec{n} (in dieser Reihenfolge) gebildet wird. Wir wählen $\vec{u} = \vec{i}$ als den Basisvektor, der in der Schnittebene eine ξ -Achse konstituiert, die parallel zur x -Achse verläuft. Dann ist der noch fehlende Basisvektor

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u} = n_3 \cdot \vec{j} + \sqrt{1 - n_3^2} \cdot \vec{k}.$$

Dieser Vektor legt die η -Achse in der Schnittebene fest. Das so entstandene Koordinatensystem wollen wir als *Koordinatensystem der Ebene* bezeichnen, weil sein Koordinatenursprung P_0 in der Ebene liegt und diese von den Vektoren \vec{u} und \vec{v} aufgespannt wird. Ein beliebiger Punkt im Raum hat in ihm den Ortsvektor $\vec{s} = \xi \vec{u} + \eta \vec{v} + \zeta \vec{n}$. (Um die Übersichtlichkeit zu wahren, haben wir weder die ζ -Achse, deren Basis-Einheitsvektor der Normalenvektor \vec{n} ist, noch den Vektor $\vec{s} = (\vec{r} - \vec{r}_0)$ in die Abbildung 1 eingezeichnet.)

Liegt der Punkt P in der Schnittebene, ist $\zeta = 0$. Es sei $\gamma = \sphericalangle(\vec{v}, \vec{k})$ der Schnittwinkel von Ebene und Kegelachse (Abbildung 1). Dieser Winkel wird durch

$$\cos \gamma = \vec{v} \cdot \vec{k} = \sqrt{1 - n_3^2}, \quad \left(0 \leq \gamma \leq \frac{\pi}{2}\right) \quad (5)$$

bestimmt.¹ Damit ist $n_3 = \sin \gamma$, und die Ebenengleichung (4) nimmt die Gestalt

$$-\cos \gamma \cdot y + \sin \gamma \cdot (z - z_0) = 0 \quad (6)$$

an.

¹Anstelle von $\sphericalangle(\vec{v}, \vec{k})$ kann ebensogut der Winkel $\sphericalangle(\vec{n}, \vec{k})$ als Schnittwinkel angesehen werden. Beide Winkel ergänzen einander zu einem rechten Winkel.

Koordinatentransformation Der Zusammenhang beider Koordinatensysteme besteht aus zwei Teilen. Der erste Teil ist die Translation

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{s} = z_0 \cdot \vec{k} + \vec{s} \quad (7)$$

des Koordinatenursprungs.

Der zweite Teil ist eine Drehung um die ξ -Achse, und es gelten die Transformationsformeln für eine Drehung in der (y, z) -Ebene, nämlich

$$\vec{u} = \vec{i}, \quad \vec{v} = \sin \gamma \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k} \quad \text{und} \quad \vec{n} = -\cos \gamma \cdot \vec{j} + \sin \gamma \cdot \vec{k}. \quad (8)$$

Beim Vergleich mit den bekannten Transformationsformeln für eine ebene Drehung ist zu beachten, daß hier der Winkel γ gegen die z -Achse und nicht gegen die y -Achse gemessen wird.

Die Umkehrtransformation ist

$$\vec{i} = \vec{u}, \quad \vec{j} = \sin \gamma \cdot \vec{v} - \cos \gamma \cdot \vec{n} \quad \text{und} \quad \vec{k} = \cos \gamma \cdot \vec{v} + \sin \gamma \cdot \vec{n}. \quad (9)$$

Translation des Koordinatenursprungs und Drehung zusammen ergeben die Koordinatentransformation

$$x = \xi, \quad y = \eta \sin \gamma - \zeta \cos \gamma \quad \text{und} \quad z = \eta \cos \gamma + \zeta \sin \gamma + z_0 \quad (10)$$

mit der Umkehrung

$$\xi = x, \quad \eta = y \sin \gamma + (z - z_0) \cos \gamma \quad \text{und} \quad \zeta = -y \cos \gamma + (z - z_0) \sin \gamma. \quad (11)$$

Für $\zeta = 0$ resultiert aus (11) direkt die Ebenengleichung in der Form (6).

Schnittfigur Liegt der Punkt P nicht nur in der Schnittebene, sondern *außerdem* auch auf dem Mantel des Kreiskegels, wird aus (2) mit (10) und $\zeta = 0$

$$\boxed{\xi^2 + \eta^2 \sin^2 \gamma - c^2 (\eta \cos \gamma + z_0)^2 = 0}. \quad (12)$$

Das ist die Gleichung für die in der Schnittebene liegende *Schnittfigur*. In der Gestalt

$$\xi^2 + (\sin^2 \gamma - c^2 \cos^2 \gamma) \left(\eta^2 - 2 \frac{c^2 z_0 \cos \gamma}{\sin^2 \gamma - c^2 \cos^2 \gamma} \eta \right) - c^2 z_0^2 = 0$$

legt diese Gleichung zweierlei nahe:

1. Wir schließen zunächst den Fall aus, daß die Ebene den Kegel parallel zu dessen Mantelfläche schneidet, denn mit $\gamma = \alpha$ wird $c = \tan \gamma$ und $\sin^2 \gamma - c^2 \cos^2 \gamma = 0$, und behandeln diesen später separat.
2. Wir fügen den η^2 - und η -Termen die *quadratische Ergänzung* hinzu und erzeugen somit ein vollständiges Quadrat.

Nach einigen elementaren Umformungsschritten mit dem Ziel einer größtmöglichen Vereinfachung erhalten wir

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{(\eta - \eta_0)^2}{b^2} = 1 \quad (13)$$

mit

$$a = |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma}} \quad \text{und} \quad b = |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma}{|\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma|} \quad (14)$$

und

$$\eta_0 = z_0 \cdot \frac{\sin^2 \alpha \cos \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma}. \quad (15)$$

Darin ist η_0 , vermittelt durch z_0 , vorzeichenbehaftet. Die Gleichung (13) erinnert an die Mittelpunktsleichung der Kegelschnitte, wobei aber schon die Existenz der Verschiebung η_0 anzeigt, daß sich die Schnittfigur nicht in Mittelpunktslage befindet.

Bei gegebenem Doppelkegel (d.i. bei gegebenem Winkel α) sind z_0 und γ die frei wählbaren Parameter: Wir können entscheiden, in welcher Höhe und unter welchem Winkel wir den Kegel schneiden.

Wir diskutieren die verschiedenen Möglichkeiten schrittweise.

3 Kreis und Ellipse

3.1 Der Fall $\gamma = \frac{\pi}{2}$

Die Schnittebene liegt parallel zur (x, y) -Ebene. Es ist nach (8) $\vec{n} = \vec{k}$ und $\vec{v} = \vec{j}$. Wir erhalten aus (14) und (15)

$$a = b = c |z_0|, \quad \eta_0 = 0 \quad \text{und damit} \quad \xi^2 + \eta^2 = (c z_0)^2.$$

Erwartungsgemäß entsteht ein *Kreis* mit dem Radius $R = c |z_0|$, dessen Mittelpunkt der Ursprung des (ξ, η) -Koordinatensystems ist, also auf der z -Achse bei $z = z_0$ liegt.

3.2 Der Fall $\alpha < \gamma < \frac{\pi}{2}$

In diesem Fall ist $\cos \alpha > \cos \gamma$, so daß der Radikand der in dem Ausdruck (14) für a enthaltenen Wurzel positiv ist. Die Schnittfigur ist eine *Ellipse*. Es ist $b > a$, sodaß

$$b = |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} \quad (16)$$

die *große Halbachse* und

$$a = |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma}} \quad (17)$$

die *kleine Halbachse* ist. Damit liegt die große Halbachse auf der η -Achse der Schnittebene. Der Mittelpunkt M der Ellipse ist auf dieser Achse allerdings gemäß (15) um η_0 verschoben.

Anstatt – wie bisher – zu fragen, welche Ellipse sich ergibt, wenn wir geeignete Werte von z_0 und γ vorgeben, können wir auch fragen, an welcher Stelle und unter welchem Winkel wir einen bestimmten Kegel schneiden müssen, um eine Ellipse mit vorgegebenen Halbachsen a und b zu erhalten. Aus (16) und (17) folgt (Beispiel: Abbildung 2)

$$|z_0| = \frac{a^2 \cot \alpha}{\sqrt{b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha}} \quad (18)$$

und

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \cos \alpha. \quad (19)$$

Die Verschiebung des Ellipsen-Mittelpunktes M ist ²

$$\eta_0 = \operatorname{sgn}(z_0) \cdot \frac{b\sqrt{b^2 - a^2} \sin \alpha}{\sqrt{b^2 \sin^2 \alpha + a^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (20)$$

Weitere Bestimmungsstücke der Ellipse Die anderen Bestimmungsstücke der Ellipse sind:

- *Lineare Exzentrizität*

$$e = \sqrt{b^2 - a^2} = |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \sin \gamma \cos \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma}, \quad (21)$$

- *Numerische Exzentrizität*

$$\varepsilon = \frac{e}{b} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} < 1 \quad (22)$$

(vergleiche (19)),

- *Halbparameter*

$$p = \frac{a^2}{b} = |z_0| \cdot \tan \alpha \sin \gamma.$$

- *Mittelpunkt*: Der Mittelpunkt M der Ellipse befindet sich in dem (ξ, η, ζ) -Koordinatensystem der Schnittebene am Ort (Abbildung 2)

$$\vec{s}_M = \eta_0 \cdot \vec{v}, \quad (23)$$

dem nach (10) und mit (15) in dem (x, y, z) -Koordinatensystem des Kegels der Ortsvektor

$$\vec{r}_M = z_0 \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} (\sin^2 \alpha \cos \gamma \cdot \vec{j} + \cos^2 \alpha \sin \gamma \cdot \vec{k}) \quad (24)$$

entspricht. Dieser hat keine x -Komponente, liegt also in der (y, z) -Ebene.

²Das Symbol sgn steht für „Signum“ (Vorzeichen). Es ist $\operatorname{sgn}(z_0) = \pm 1$ je nachdem, ob wir den oberen (+) oder unteren (–) Teil des Doppelkegels schneiden.

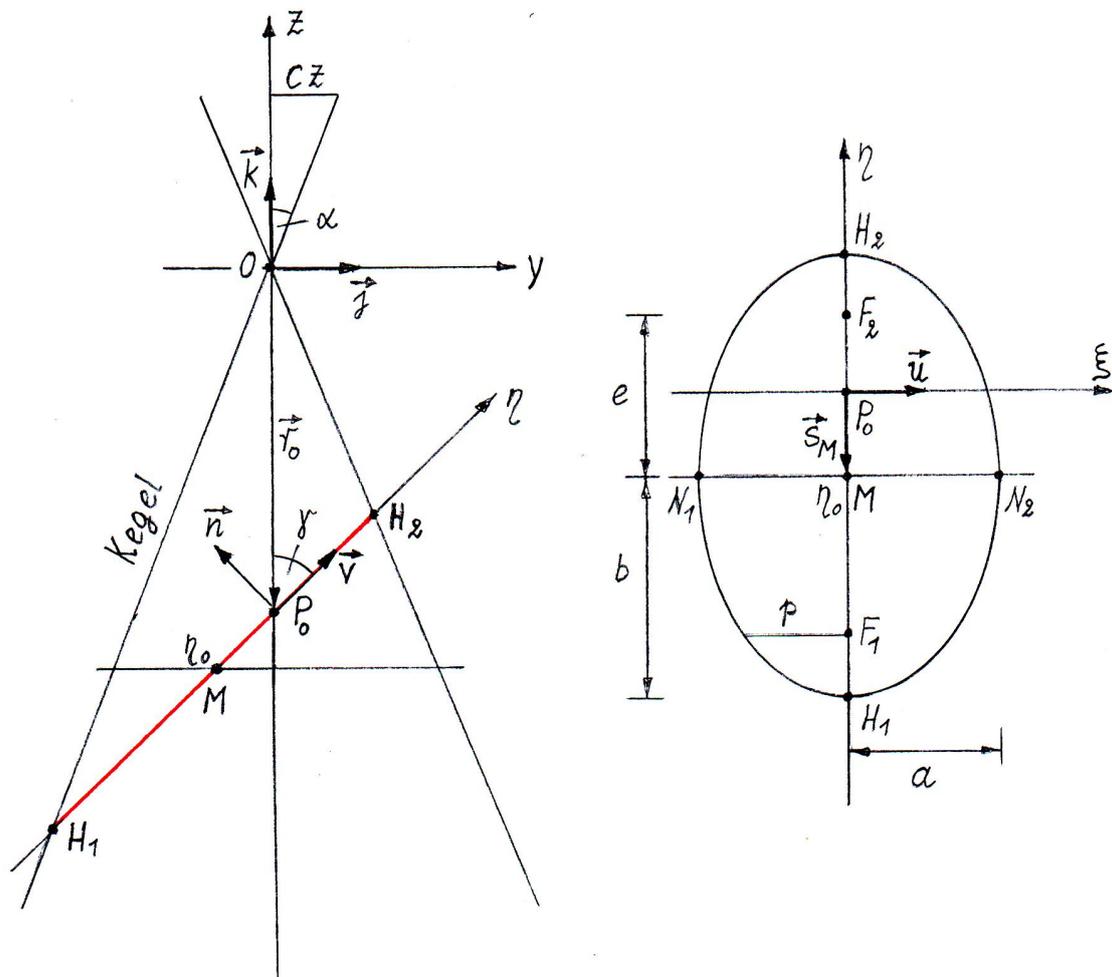


Abbildung 2: Gegeben ist ein Kegel mit dem halben Öffnungswinkel $\alpha = 22^\circ$ und eine Ellipse mit den Halbachsen $a = 2 \text{ cm}$ und $b = 3 \text{ cm}$. Um diese als Schnittfigur des unteren Kegels zu erhalten, muß die Ebene diesen bei $z_0 = -4,6 \text{ cm}$ unter dem Winkel $\gamma = 46,3^\circ$ schneiden. Der Mittelpunkt der Ellipse liegt bei $\eta_0 = -1,16 \text{ cm}$. Der rechte Teil der Abbildung ist eine Draufsicht auf die Schnittebene. (Verkleinerungsfaktor der Abbildung: 0,9.)

- *Brennpunkte*: Die Positionen der Brennpunkte F_1 (unteres Vorzeichen) und F_2 (oberes Vorzeichen) sind in der Schnittebene ³

$$\begin{aligned}\vec{s}_F &= (\eta_0 \pm e) \cdot \vec{v} \\ &= |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} [\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \pm \sin \gamma] \cdot \vec{v}.\end{aligned}\quad (25)$$

Darin haben wir $z_0 = \operatorname{sgn}(z_0) \cdot |z_0|$ verwendet. Ihre Koordinaten in der (y, z) -Ebene sind gemäß (10)

$$\begin{aligned}\vec{r}_F &= |z_0| \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} \left\{ \sin \alpha \cos \gamma [\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \pm \sin \gamma] \cdot \vec{j} \right. \\ &\quad \left. + [\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \cos^2 \alpha \sin \gamma \pm \sin \alpha \cos^2 \gamma] \cdot \vec{k} \right\}.\end{aligned}\quad (26)$$

- *Haupt-Scheitelpunkte*: Die Positionen der Haupt-Scheitelpunkte H_1 (unteres Vorzeichen) und H_2 (oberes Vorzeichen) sind in der Schnittebene (Abbildung 2)

$$\begin{aligned}\vec{s}_H &= (\eta_0 \pm b) \cdot \vec{v} \\ &= |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} [\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \cos \gamma \pm \cos \alpha \sin \gamma] \cdot \vec{v}.\end{aligned}\quad (27)$$

Ihre Koordinaten in der (y, z) -Ebene ergeben sich mit (10) zu

$$\begin{aligned}\vec{r}_H &= |z_0| \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} [\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \cos \gamma \pm \cos \alpha \sin \gamma] \\ &\quad \cdot [\sin \alpha \cdot \vec{j} \pm \operatorname{sgn}(z_0) \cdot \cos \alpha \cdot \vec{k}].\end{aligned}\quad (28)$$

- *Neben-Scheitelpunkte*: Die Neben-Scheitelpunkte N_1 (unteres Vorzeichen) und N_2 (oberes Vorzeichen) befinden sich in der Schnittebene an den Orten (Abbildung 2)

$$\begin{aligned}\vec{s}_N &= \pm a \vec{u} + \eta_0 \vec{v} \\ &= |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} \left[\pm \sin \gamma \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} \cdot \vec{u} + \operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \cos \gamma \cdot \vec{v} \right].\end{aligned}\quad (29)$$

Dem entsprechen, den Transformationsformeln (10) zufolge, im Koordinatensystem des Kegels die Ortsvektoren

$$\begin{aligned}\vec{r}_N &= |z_0| \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} \left\{ \pm \sin \alpha \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} \cdot \vec{i} \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{sgn}(z_0) (\sin^2 \alpha \cos \gamma \cdot \vec{j} + \cos^2 \alpha \sin \gamma \cdot \vec{k}) \right\},\end{aligned}\quad (30)$$

die Vektoren im Raum sind, welche nicht in einer der Koordinatenebenen liegen. Ihr untereinander gleicher Betrag ist

$$|\vec{r}_N| = |z_0| \cdot \frac{\cos \alpha \sin^2 \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma}.\quad (31)$$

³Wir ordnen F_1 das Minus- und F_2 das Pluszeichen unabhängig davon zu, ob wir den unteren oder den oberen Teil des Doppelkegels schneiden.

Konstruktion der kleinen Halbachse Um aus Abbildung 2 auch die kleine Halbachse a zu konstruieren, verfahren wir in folgenden Schritten, wenn die Schnitthöhe z_0 und der Schnittwinkel γ gegeben sind (Abbildung 3):

- Wir zeichnen durch den Punkt P_0 die Schnittebene, die den Kegelmantel in den Haupt-Scheitelpunkten H_1 und H_2 schneidet.
- Der Mittelpunkt M der Ellipse halbiert die Strecke $\overline{H_1H_2}$, es ist also $\overline{H_1M} = \overline{H_2M} = \frac{1}{2}\overline{H_1H_2}$.
- Ein parallel zur (x, y) -Ebene verlaufender Schnitt durch den Kegel, der den Punkt M enthält, ist ein Kreis, dessen Mittelpunkt C auf der z -Achse liegt und der den Radius r_C hat.
- Wir zeichnen diesen Kreis (Abbildung 3, rechts) und in ihm eine Parallele zur x -Achse in dem aus dem linken Teil dieser Abbildung zu entnehmenden Abstand \overline{MC} von seinem Mittelpunkt C . Diese Parallele schneidet den Kreis in den Neben-Scheitelpunkten N_1 und N_2 . Die Sehne $\overline{N_1N_2}$ hat die Länge der kleinen Achse der Ellipse, $\overline{N_1M} = \overline{N_2M} = \frac{1}{2}\overline{N_1N_2} = a$.

Nachweis: Es ist

$$a = \sqrt{r_C^2 - \overline{MC}^2}$$

mit $\overline{MC} = |\eta_0| \sin \gamma$, wobei η_0 durch (15) gegeben ist. Desweiteren ist

$$r_C = \overline{OC} \cdot \tan \alpha = (|z_0| + |\eta_0| \cos \gamma) \cdot \tan \alpha.$$

Damit bestätigen wir nach einfachen Umformungsschritten den Ausdruck (17) für die kleine Halbachse a .

3.3 Eigenschaften von Ellipsen, die durch parallele Schnittebenen entstehen

Wir diskutieren die bisherigen Ergebnisse für den Fall, daß die Schnittebenen in verschiedenen Höhen z_0 zueinander parallel sind, also den gleichen Schnittwinkel γ haben (Abbildung 4).

- Es ist bemerkenswert, daß die *numerische Exzentrizität* (22) nicht von der Höhe $|z_0|$ abhängt. Das bedeutet, daß Ellipsen, die durch parallele Schnittebenen entstehen, das gleiche Achsenverhältnis haben und so einander *ähnlich* sind.
- Die *Mittelpunkte* der Ellipsen, die durch parallele Schnittebenen entstehen, liegen in der (y, z) -Ebene auf der Ursprungsgeraden

$$z = \cot^2 \alpha \tan \gamma \cdot y$$

durch die Kegelspitze (Abbildung 4).

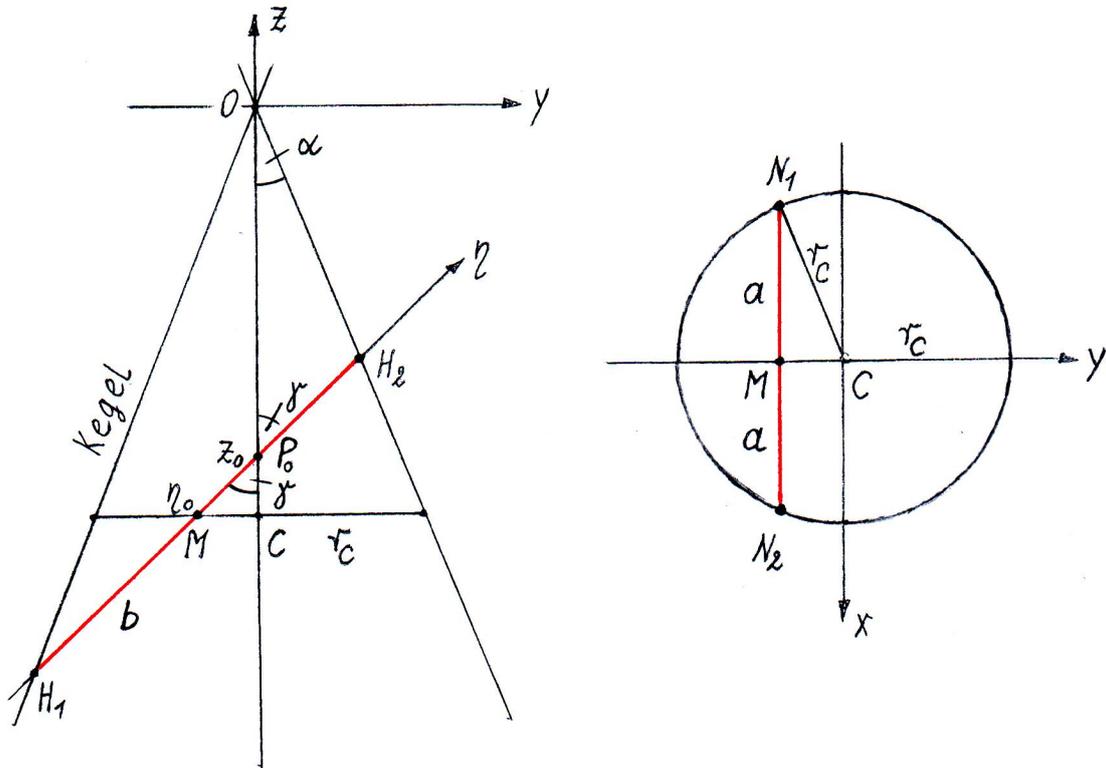


Abbildung 3: Zur Konstruktion der kleinen Halbachse a . Die Abbildung paßt maßstabgerecht zu Abbildung 2, es ist also $a = 2 \text{ cm}$. Der linke Teil der Abbildung entspricht ganz dem von Abbildung 2. Der rechte Teil ist eine Draufsicht auf den Kreis in der Schnitthöhe $\overline{OC} = |z_0| + |\eta_0| \cos \gamma$, der den Mittelpunkt C und den Radius r_C hat. Die kleine Achse der Ellipse ist die Sehne $\overline{N_1N_2}$. (Verkleinerungsfaktor der Abbildung: 0,94.)

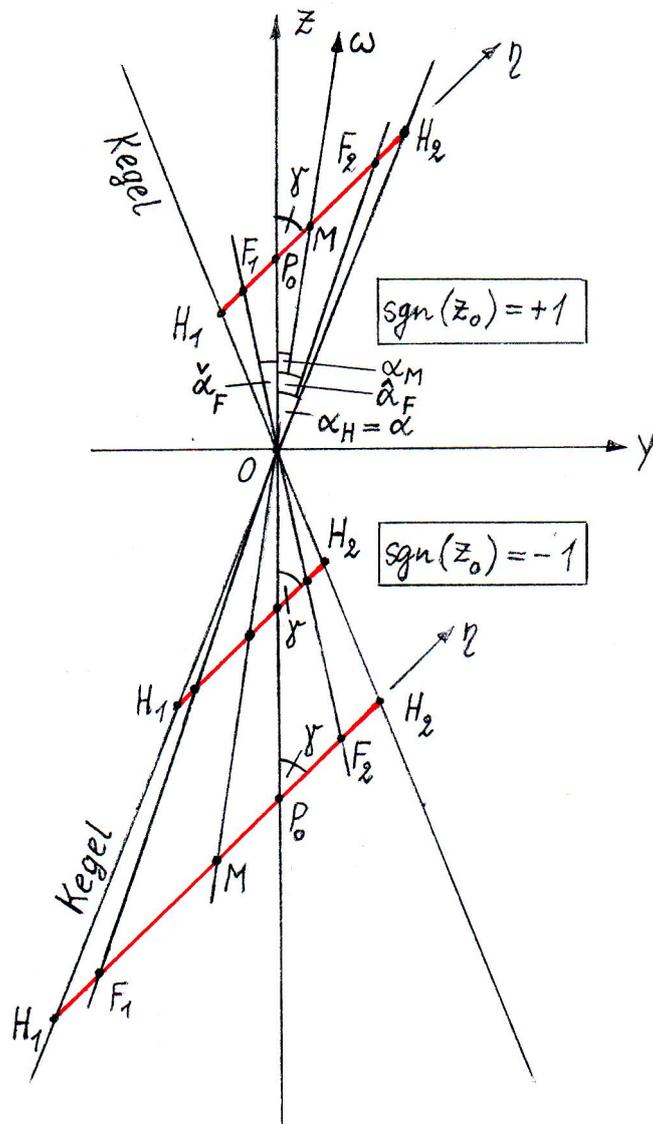


Abbildung 4: Drei Beispiele für zueinander parallele Schnittebenen. Der Kegel und die untere Schnittebene sind wie in den Abbildungen 2 und 3. Die Mittelpunkte M der geometrisch ähnlichen Ellipsen, ihre Brennpunkte F_1 und F_2 sowie ihre Haupt-Scheitelpunkte H_1 und H_2 liegen jeweils auf Ursprungsgeraden in der (y, z) -Ebene, deren Steigungen im Text berechnet werden. Mit den in Abbildung 2 gegebenen Werten für α und γ erhalten wir aus (32) $\alpha_M = 8,9^\circ$ und aus (33) $\hat{\alpha}_F = 19,5^\circ$ für die steigende sowie $\check{\alpha}_F = 11,5^\circ$ für die fallende Gerade, auf der die Brennpunkte liegen. (Skalierungsfaktor der Abbildung: 1,0.)

Um dies einzusehen, betrachten wir noch einmal den Ortsvektor (24) des Mittelpunktes einer Ellipse mit der Schnitthöhe $|z_0|$. Nun interpretieren wir (24) als Punkt-Richtungs-Gleichung $\vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \cdot \vec{d}$ einer Geraden. Da es sich bei \vec{r}_M um einen Ortsvektor handelt, ist $\vec{r}_1 = \vec{0}$. Es ist jetzt z_0 ein variabler Parameter, der die verschiedenen Schnittebenen unterscheidet. Wir dürfen $\lambda = z_0$ setzen, da der in (24) verbleibende Richtungsvektor \vec{d} von $|z_0|$ nicht mehr abhängt. Alle Ortsvektoren \vec{r}_M haben also die gleiche Richtung, liegen mithin auf einer Geraden. Das Verhältnis der z - zur y -Komponente des Richtungsvektors führt unmittelbar auf die angegebene Geradengleichung.

Bezeichnen wir mit α_M den Winkel, den diese Gerade mit der z -Achse einschließt, ist ihr gegen diese Achse gemessener Anstieg durch

$$\tan \alpha_M = \tan^2 \alpha \cot \gamma \quad (32)$$

gegeben. Es ist etwas aufwendiger aber gleichwohl instruktiv, $\tan \alpha_M$ aus $\cos \alpha_M = \frac{\vec{r}_M \cdot \vec{k}}{|\vec{r}_M|}$ einschließlich der dabei entstehenden Vorzeichendiskussion zu berechnen (Übungsaufgabe).

- Auf die gleiche Weise können wir mit Hilfe von (26) zeigen, daß die *Brennpunkte* der Ellipsen, die durch parallele Schnittebenen entstehen, auf zwei Ursprungsgeraden durch die Kegelspitze liegen, die durch

$$z = \frac{1 - \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \alpha \cos \gamma} \cdot y \quad \text{und} \quad z = -\frac{1 + \sin \alpha \sin \gamma}{\sin \alpha \cos \gamma} \cdot y \quad (33)$$

gegeben sind. Der Kehrwert des Vorfaktors von y in diesen Geradengleichungen ist der Tangens der in Bezug auf die z -Achse gemessenen beiden Anstiegswinkel $\hat{\alpha}_F$ beziehungsweise $\check{\alpha}_F$. Es ist $\hat{\alpha}_F > \check{\alpha}_F$.

In Übereinstimmung mit der gewählten Bezeichnung der Brennpunkte (siehe Fußnote 2 und Abbildung 4) liegen auf der steigenden Geraden die Brennpunkte F_1 des unteren und die Brennpunkte F_2 des oberen Kegels. Auf der fallenden Geraden liegen die Brennpunkte F_1 des oberen und F_2 des unteren Kegels. Bei Beachtung von $\cos \alpha > \cos \gamma$ folgt dies aus einer sorgfältigen Betrachtung der Vorzeichen in (26) (Übungsaufgabe).

- Ganz entsprechend finden wir, daß auch die *Haupt-Scheitelpunkte* (28) in der (y, z) -Ebene auf zwei Geraden liegen, die durch die Gleichungen

$$z = \pm \cot \alpha \cdot y$$

beschrieben werden. Danach schließen beide Geraden mit der z -Achse den gleichen Winkel $\hat{\alpha}_H = \check{\alpha}_H = \alpha$ ein. Das entspricht unseren Erwartungen, denn die Haupt-Scheitelpunkte befinden sich auf Mantellinien des Doppelkegels.

Die Diskussion der Vorzeichen in (28) führt zu den gleichen Aussagen wie bei den Brennpunkten, wenn diese sinngemäß auf die Haupt-Scheitelpunkte übertragen werden (Übungsaufgabe).

- Wie die Komponenten-Darstellung des Ortsvektors (30) zeigt und was von vornherein anschaulich klar ist, liegen die *Neben-Scheitelpunkte* nicht wie alle bisher betrachteten besonderen Punkte der Ellipse in der (y, z) -Ebene. Wir erwarten, daß die Neben-Scheitelpunkte verschiedener, in zueinander parallelen Schnittebenen liegender Ellipsen in einer Ebene liegen, deren Normalenvektor \vec{m} keine x -Komponente hat und die auch die auf einer Linie liegenden Mittelpunkte dieser Ellipsen enthält (Abbildung 5).

Indem wir (30) wieder als Punkt-Richtungs-Gleichung einer Geraden mit dem Parameter $\lambda = |z_0|$ interpretieren, erkennen wir, daß auch die Neben-Scheitelpunkte N_1 und N_2 auf zwei Geraden liegen.

Für den Winkel $\alpha_N \equiv \sphericalangle(\vec{r}_N, \vec{k})$, den diese Geraden mit der z -Achse einschließen, finden wir mit (30) und (31)

$$\cos \alpha_N = \frac{\vec{r}_N}{|\vec{r}_N|} \cdot \vec{k} = \operatorname{sgn}(z_0) \cdot \cos \alpha.$$

Dieses Ergebnis muß sich einstellen, da auch die Neben-Scheitelpunkte Punkte auf dem Kegelmantel sind.

Die aus (30) ablesbaren Richtungsvektoren \vec{d}_{N1} und \vec{d}_{N2} , die nicht zueinander parallel sind, spannen eine Ebene auf. Den Normalen-Einheitsvektor \vec{m} dieser Ebene berechnen wir aus deren Vektorprodukt zu

$$\vec{m} = -\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \frac{\vec{d}_{N1} \times \vec{d}_{N2}}{|\vec{d}_{N1} \times \vec{d}_{N2}|} = \frac{-\cos^2 \alpha \sin \gamma \cdot \vec{j} + \sin^2 \alpha \cos \gamma \cdot \vec{k}}{\sqrt{\cos^4 \alpha \sin^2 \gamma + \sin^4 \alpha \cos^2 \gamma}}.$$

Mit dem durch (32) bestimmten Winkel α_M läßt sich dieser Ausdruck in die zu dem Normalenvektor \vec{n} aus (8) analoge, übersichtlichere und leicht interpretierbare Form

$$\vec{m} = -\cos \alpha_M \cdot \vec{j} + \sin \alpha_M \cdot \vec{k}$$

überführen. Der Schnittwinkel der Ebene, in der die Neben-Scheitelpunkte untereinander paralleler Schnittebenen liegen, mit der Achse des Doppelkegels ist also α_M . Das bestätigt unsere Erwartung, daß auch die Mittelpunkte der auf parallelen Schnittebenen liegenden Ellipsen in dieser Ebene liegen; es ist $\vec{r}_M \cdot \vec{m} = 0$.

Da der Vektor \vec{m} keine x -Komponente hat, können wir mit dieser Ebene weiterhin verfahren wie mit der Schnittebene: Wir behalten den Vektor $\vec{u} = \vec{i}$ bei und konstruieren einen dritten, in der von \vec{d}_{N1} und \vec{d}_{N2} aufgespannten Ebene liegenden Basis-Einheitsvektor

$$\begin{aligned} \vec{w} = \vec{m} \times \vec{u} &= \frac{\sin^2 \alpha \cos \gamma \cdot \vec{j} + \cos^2 \alpha \sin \gamma \cdot \vec{k}}{\sqrt{\cos^4 \alpha \sin^2 \gamma + \sin^4 \alpha \cos^2 \gamma}} \\ &= \sin \alpha_M \cdot \vec{j} + \cos \alpha_M \cdot \vec{k} \\ &= \operatorname{sgn}(z_0) \cdot \frac{\vec{r}_M}{|\vec{r}_M|}. \end{aligned}$$

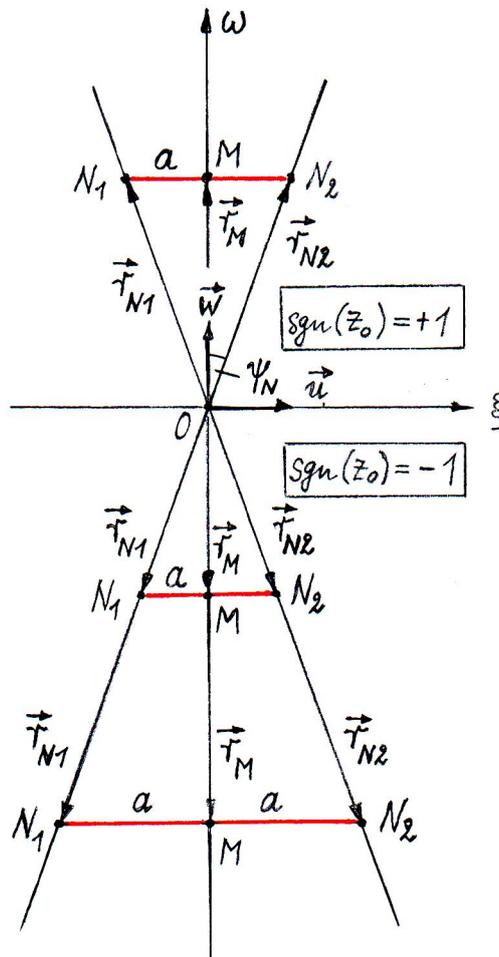


Abbildung 5: Draufsicht auf die von den Vektoren \vec{u} und \vec{w} aufgespannte (ξ, ω) -Ebene, in der die Neben-Scheitelpunkte N_1 und N_2 der geometrisch ähnlichen Ellipsen liegen. Die drei eingezeichneten Beispiele entsprechen denen von Abbildung 4. Mit den in Abbildung 2 gegebenen Werten für α und γ erhalten wir aus (34) den Anstiegswinkel $\psi_N = 20,2^\circ$. (Skalierungsfaktor der Abbildung: 1,0.)

Dieser Vektor entspricht dem Vektor \vec{v} aus (8); er schließt mit der Kegelachse den Winkel α_M ein.

In der Reihenfolge \vec{u} , \vec{w} , \vec{m} ordnen wir diesen Vektoren die ξ -, ω - und τ -Achsen zu. Dann gelten für einen beliebigen Punkt im Raum die Transformationsformeln

$$\begin{aligned}\xi &= x \\ \omega &= \frac{\sin^2 \alpha \cos \gamma \cdot y + \cos^2 \alpha \sin \gamma \cdot z}{\sqrt{\cos^4 \alpha \sin^2 \gamma + \sin^4 \alpha \cos^2 \gamma}} = y \sin \alpha_M + z \cos \alpha_M \\ \tau &= \frac{-\cos^2 \alpha \sin \gamma \cdot y + \sin^2 \alpha \cos \gamma \cdot z}{\sqrt{\cos^4 \alpha \sin^2 \gamma + \sin^4 \alpha \cos^2 \gamma}} = -y \cos \alpha_M + z \sin \alpha_M.\end{aligned}$$

Diese Transformationsformeln entsprechen strukturell denen von (11), wenn wir dort $z_0 = 0$ setzen und die Ersetzungen $\eta \rightarrow \omega$, $\zeta \rightarrow \tau$ und $\gamma \rightarrow \alpha_M$ vornehmen. Handelt es sich bei diesem Punkt aber um die Neben-Scheitelpunkte N_1 und N_2 von (30), finden wir

$$\xi = \pm a, \quad \omega = \operatorname{sgn}(z_0) \cdot |\vec{r}_M| \quad \text{und} \quad \tau = 0,$$

also

$$\vec{r}_N = \pm a \cdot \vec{u} + \operatorname{sgn}(z_0) |\vec{r}_M| \cdot \vec{w}$$

(vergleiche auch (29)). Dieses Ergebnis läßt sich auch direkt aus Abbildung 5 ablesen. In der (ξ, ω) -Ebene liegen die Neben-Scheitelpunkte also auf den Ursprungsgeraden

$$\omega = \pm \frac{\sqrt{\cos^4 \alpha \sin^2 \gamma + \sin^4 \alpha \cos^2 \gamma}}{\sin \alpha \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma}} \cdot \xi. \quad (34)$$

Dabei haben wir von (24) und (17) Gebrauch gemacht.

4 Die Hyperbel

4.1 Der Fall $0 < \gamma < \alpha$

In diesem Fall verläuft die Schnittebene so steil, daß sie beide Teile des Doppelkegels schneidet. Es ist $\cos \gamma > \cos \alpha$, und damit wird der Radikand in dem Wurzel Ausdruck (14) für a negativ. Wir definieren die reelle Größe

$$\tilde{a} = |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sqrt{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}}, \quad (35)$$

so daß $a = \pm i \tilde{a}$ und damit $a^2 = -\tilde{a}^2$ gilt. Außerdem ist, ebenfalls nach (14),

$$b = |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \cos \alpha \sin \gamma}{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}. \quad (36)$$

Damit wird aus Gleichung (13) für die Schnittfigur

$$\frac{(\eta - \eta_0)^2}{b^2} - \frac{\xi^2}{\tilde{a}^2} = 1. \quad (37)$$

Sie beschreibt eine *Hyperbel* mit der *transversalen Achse* b , die auf der η -Achse in der Schnittebene liegt, und der *imaginären* (konjugierten) *Achse* \tilde{a} entlang der ξ -Achse. Die Verschiebung η_0 ist weiterhin durch (15) gegeben.

Die Umkehrung der Aufgabe, nämlich aus vorgegebenen Achsen b und \tilde{a} der Hyperbel Schnitthöhe und Schnittwinkel zu bestimmen, ergibt für die Schnitthöhe

$$|z_0| = \frac{\tilde{a}^2 \cot \alpha}{\sqrt{b^2 \sin^2 \alpha - \tilde{a}^2 \cos^2 \alpha}} \quad (38)$$

und für den Schnittwinkel

$$\cos \gamma = \frac{\sqrt{b^2 + \tilde{a}^2}}{b} \cos \alpha \quad (39)$$

(Beispiel: Abbildung 6). Die Verschiebung des Hyperbel-Mittelpunktes M ist

$$\eta_0 = -\text{sgn}(z_0) \cdot \frac{b \sqrt{b^2 + \tilde{a}^2} \sin \alpha}{\sqrt{b^2 \sin^2 \alpha - \tilde{a}^2 \cos^2 \alpha}}. \quad (40)$$

Die entsprechenden Resultate für die Ellipse waren die Formeln (18), (19) und (20). Die Unterschiede zwischen Ellipse und Hyperbel kommen in den Vorzeichen und in den Definitionsbereichen des Schnittwinkels γ zum Ausdruck. Während die Beziehungen (19) und (22) für jede Ellipse erfüllbar sind, bringt (39) eine Einschränkung mit sich, die wir im Zusammenhang mit der Exzentrizität sogleich benennen werden.

Weitere Bestimmungsstücke der Hyperbel Der Gliederung bei der Ellipse folgend, führen wir weitere Bestimmungsstücke und besondere Punkte der Hyperbel auf.

- *Lineare Exzentrizität*

$$e = \sqrt{b^2 + \tilde{a}^2} = |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \sin \gamma \cos \gamma}{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}. \quad (41)$$

Dieser Ausdruck ähnelt (21), hat aber vertauschte Summanden im Nenner.

- *Numerische Exzentrizität*

$$\varepsilon = \frac{e}{b} = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} > 1. \quad (42)$$

Mit $\varepsilon > 1$ ergibt sich nun die erwähnte Einschränkung $\cos \gamma = \varepsilon \cos \alpha \leq 1$ zu $\cos \alpha \leq \frac{1}{\varepsilon}$.

Andererseits ist aber auch $\cos \varphi_G = \frac{1}{\varepsilon}$ mit φ_G als dem Grenzwinkel, den die Asymptoten der Hyperbel mit deren transversaler Achse einschließen. Es muß also $\cos \alpha \leq \cos \varphi_G$ und damit

$$\alpha \geq \varphi_G \quad (43)$$

sein. In Worten: Um eine durch ihre transversale und konjugierte Achse vorgegebene Hyperbel als Kegelschnitt zu erhalten, muß der halbe Öffnungswinkel des Kegels mindestens so groß sein wie der Anstiegswinkel der Asymptoten dieser Hyperbel gegen ihre transversale Achse. Wenn diese Bedingung erfüllt ist, ist der Schnittwinkel γ durch (39) gegeben. Dann sind auch die Radikanden der Wurzelausdrücke in den Nennern von (38) und (40) positiv.

- *Gleichseitige Hyperbeln*: Gleichseitige Hyperbeln haben die Eigenschaften

$$b = \tilde{a} = |z_0| \cdot \tan \alpha \cdot \sqrt{1 - 2 \cos^2 \alpha}$$

und $\varepsilon = \sqrt{2}$. Die Bedingung (43) geht in $\alpha \geq \frac{\pi}{4}$ über. Damit gleichseitige Hyperbeln als Kegelschnitte entstehen können, muß der halbe Öffnungswinkel α des Kegels mindestens 45° betragen. Dann ist der Schnittwinkel durch $\cos \gamma = \sqrt{2} \cos \alpha$ gegeben.

- *Halbparameter*

$$p = \frac{\tilde{a}^2}{b} = |z_0| \cdot \tan \alpha \sin \gamma.$$

- *Mittelpunkt*: Der Mittelpunkt M der Hyperbel wird durch den Ortsvektor

$$\vec{s}_M = \eta_0 \cdot \vec{v}, \quad (44)$$

mit dem durch (15) gegebenen η_0 und – im Koordinatensystem des Kegels –

$$\vec{r}_M = z_0 \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} (\sin^2 \alpha \cos \gamma \cdot \vec{j} + \cos^2 \alpha \sin \gamma \cdot \vec{k}) \quad (45)$$

beschrieben. Diese Vektoren stimmen formal mit (23) und (24) für die Ellipse überein, jedoch ist hier $\cos \gamma > \cos \alpha$.

- *Brennpunkte*: Für die Brennpunkte F_1 (unteres Vorzeichen) und F_2 (oberes Vorzeichen) erhalten wir

$$\begin{aligned} \vec{s}_F &= (\eta_0 \pm e) \cdot \vec{v} \\ &= |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha \cos \gamma}{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha} [-\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \pm \sin \gamma] \cdot \vec{v} \end{aligned} \quad (46)$$

und

$$\begin{aligned} \vec{r}_F &= |z_0| \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha} \left\{ \sin \alpha \cos \gamma [-\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \pm \sin \gamma] \cdot \vec{j} \right. \\ &\quad \left. + [-\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \cos^2 \alpha \sin \gamma \pm \sin \alpha \cos^2 \gamma] \cdot \vec{k} \right\}. \end{aligned} \quad (47)$$

- *Scheitelpunkte*: Die Lage der Scheitelpunkte wird beschrieben durch

$$\begin{aligned}\vec{s}_S &= (\eta_0 \pm b) \cdot \vec{v} \\ &= |z_0| \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha} [-\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \cos \gamma \pm \cos \alpha \sin \gamma] \cdot \vec{v}\end{aligned}\quad (48)$$

und

$$\begin{aligned}\vec{r}_S &= |z_0| \cdot \frac{\sin \gamma}{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha} [-\operatorname{sgn}(z_0) \cdot \sin \alpha \cos \gamma \pm \cos \alpha \sin \gamma] \\ &\quad \cdot [\sin \alpha \cdot \vec{j} \mp \operatorname{sgn}(z_0) \cdot \cos \alpha \cdot \vec{k}].\end{aligned}\quad (49)$$

Darin gilt wie bisher das untere Vorzeichen für den Scheitelpunkt S_1 , das obere für S_2 .

Mit Hilfe dieser Ergebnisse lassen sich unmittelbar die Eigenschaften von Hyperbeln formulieren, die durch parallele Schnittebenen entstehen. Das haben wir im Fall der Ellipsen explizit vorgeführt. Für die Hyperbeln überlassen wir dies dem Leser zur Übung.

Die Asymptoten der Hyperbel In dem (ξ, η) -Koordinatensystem der Schnittebene mit P_0 als Koordinatenursprung (Abbildung 6) werden die beiden durch den Mittelpunkt M gehenden Asymptoten der Hyperbel durch die Geradengleichungen

$$\eta = \eta_0 \pm \cot \varphi_G \cdot \xi$$

beschrieben, worin der Winkel φ_G durch

$$\cos \varphi_G = \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{entsprechend} \quad \cot \varphi_G = \frac{b}{\tilde{a}} \quad (50)$$

bestimmt ist. In Gestalt einer Punkt-Richtungs-Gleichung werden diese Geradengleichungen durch den Ortsvektor in der (ξ, η) -Ebene

$$\begin{aligned}\vec{s}_{\text{Asy}} &= \eta_0 \cdot \vec{v} + \xi \cdot (\vec{u} \pm \cot \varphi_G \cdot \vec{v}) \\ &= \frac{\sin^2 \alpha \cos \gamma}{\cos^2 \alpha - \cos^2 \gamma} z_0 \cdot \vec{v} + \xi \cdot \left(\vec{u} \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}} \cdot \vec{v} \right)\end{aligned}\quad (51)$$

mit dem Parameter $\lambda = \xi$ repräsentiert. Mit den Transformationsformeln (10) ergibt sich der zugehörige Ortsvektor im Raum zu

$$\vec{r}_{\text{Asy}} = \vec{r}_M + x \cdot \left[\vec{i} \pm \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}} (\sin \gamma \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}) \right], \quad (52)$$

worin \vec{r}_M der Ortsvektor (45) des Hyperbel-Mittelpunktes ist.

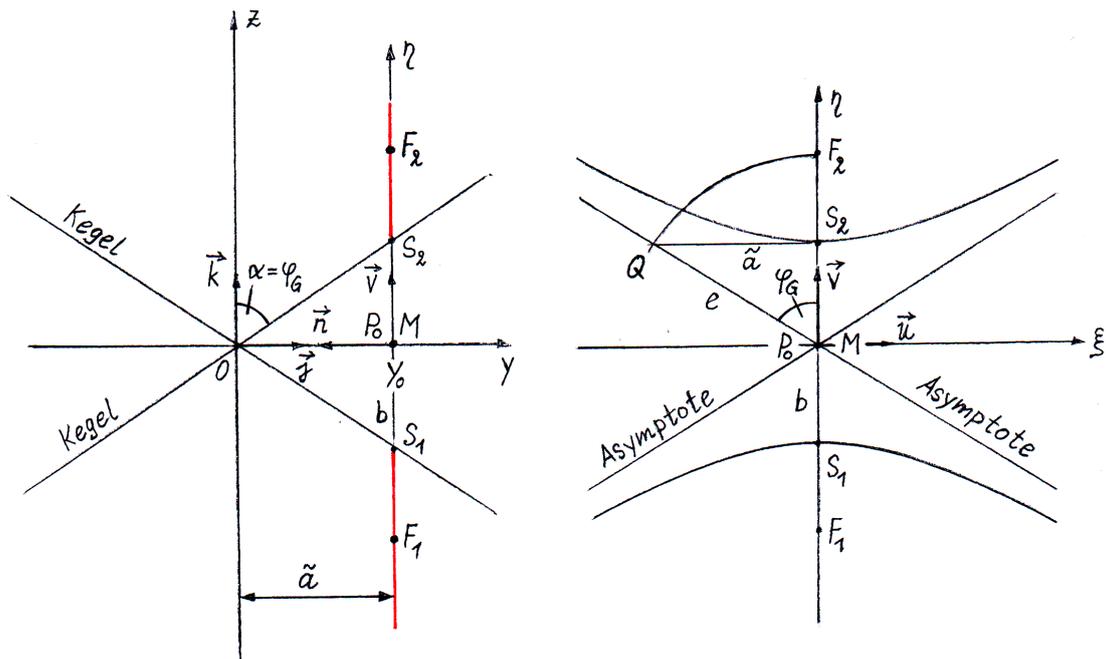


Abbildung 7: Die im rechten Teil der Abbildung dargestellte Hyperbel ist die gleiche wie in Abbildung 6. Während in Abbildung 6 nur die Bedingung $\alpha > \varphi_G$ erfüllt sein muß, um diese Hyperbel als Kegelschnitt zu erhalten, ist für $\gamma = 0$ in dieser Abbildung $\alpha = \varphi_G = 56,7^\circ$ zu wählen. Das legt den Kegel im linken Teil der Abbildung fest. Die Dreiecke $\triangle OMS_2$ (links) und $\triangle MS_2Q$ (rechts) sind kongruent. (Verkleinerungsfaktor der Abbildung: 0,81.)

4.2 Der Fall $\gamma = 0$

Die Schnittebene liegt nun parallel zur (x, z) -Ebene, sodaß es keinen Punkt P_0 gibt, wo die z -Achse diese Ebene durchstößt. Wir müssen daher ganz an den Anfang unserer Überlegungen zurückgehen.

Mit $\gamma = 0$ sind die Basis-Einheitsvektoren (8) (Abbildung 7)

$$\vec{u} = \vec{i}, \quad \vec{v} = \vec{k} \quad \text{und} \quad \vec{n} = -\vec{j}.$$

Wir legen den Koordinatenursprung P_0 des Koordinatensystems der Ebene im Abstand $y = y_0$ auf die y -Achse des Koordinatensystems des Kegels, haben also $\vec{r}_0 = y_0 \vec{j}$. Dann

transformieren sich die Koordinaten beider Systeme anstelle der Formeln (10) gemäß

$$x = \xi, \quad y = y_0 - \zeta \quad \text{und} \quad z = \eta.$$

Für einen Punkt in der Schnittebene ist $\zeta = 0$, und wenn dieser Punkt außerdem auf dem Kegelmantel liegt, folgt aus (2) die Mittelpunktsgleichung

$$\frac{\eta^2}{\left(\frac{y_0}{c}\right)^2} - \frac{\xi^2}{y_0^2} = 1$$

einer Hyperbel mit frei wählbarem y_0 . Es ist also mit (3) die transversale Achse der Hyperbel, auf der η -Achse liegend,

$$b = \frac{|y_0|}{c} = \frac{|y_0|}{\tan \alpha}$$

und die imaginäre Achse, auf der ξ -Achse liegend,

$$\tilde{a} = |y_0|.$$

Das Verhältnis beider Achsen ist

$$\frac{\tilde{a}}{b} = \tan \alpha.$$

Bei vorgegebenem Kegel sind demnach nur Hyperbeln mit diesem Achsenverhältnis als Schnittfiguren mit parallelen Ebenen und $\gamma = 0$ möglich, die sich in unterschiedlichen Abständen $\overline{OP_0} = y_0$ befinden. Sollen umgekehrt Hyperbeln mit vorgegebenen Achsen b und \tilde{a} entstehen, ist dies nur möglich, wenn der Kegel den dazu passenden halben Öffnungswinkel α hat. Insbesondere verlangen gleichseitige Hyperbeln den Winkel $\alpha = 45^\circ$.

Weitere Bestimmungsstücke der Hyperbel mit $\gamma = 0$ Exzentrizität und besondere Punkte der Hyperbel ergeben sich auf sehr einfache Weise wie folgt.

- *Lineare Exzentrizität*

$$e = \frac{|y_0|}{\sin \alpha},$$

- *Numerische Exzentrizität*

$$\varepsilon = \frac{1}{\cos \alpha},$$

was auch aus (42) für $\gamma = 0$ folgt.

- *Mittelpunkt*: Da der Mittelpunkt M der Hyperbel mit dem Ursprung P_0 des Koordinatensystems der Ebene zusammenfällt, ist

$$\vec{s}_M = \vec{0} \quad \text{und} \quad \vec{r}_M = y_0 \cdot \vec{j}.$$

- *Brennpunkte*: Für die Brennpunkte F_1 (unteres Vorzeichen) und F_2 (oberes Vorzeichen) ist

$$\vec{s}_F = \pm e \cdot \vec{v}$$

und

$$\vec{r}_F = |y_0| \cdot \frac{1}{\sin \alpha} [\operatorname{sgn}(y_0) \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} \pm \vec{k}].$$

- *Scheitelpunkte*: Die Ortsvektoren der Scheitelpunkte S_1 (unteres Vorzeichen) und S_2 (oberes Vorzeichen) sind in beiden Koordinatensystemen

$$\vec{s}_S = \pm b \cdot \vec{v}$$

und

$$\vec{r}_S = |y_0| \cdot \frac{1}{\sin \alpha} [\operatorname{sgn}(y_0) \cdot \sin \alpha \cdot \vec{j} \pm \cos \alpha \cdot \vec{k}] \quad \text{mit} \quad |\vec{r}_S| = e.$$

Die Asymptoten der Hyperbel mit $\gamma = 0$ Da (50) zufolge das Achsenverhältnis auch den Tangens des Grenzwinkels φ_G der Asymptoten bestimmt, ist

$$\alpha = \varphi_G.$$

Dementsprechend werden die beiden Asymptoten durch die Geradengleichungen

$$\eta = \pm \cot \alpha \cdot \xi$$

beschrieben und an die Stelle von (51) und (52) treten die Vektoren

$$\vec{s}_{\text{Asy}} = \xi \cdot (\vec{u} \pm \cot \alpha \cdot \vec{v})$$

beziehungsweise

$$\vec{r}_{\text{Asy}} = y_0 \cdot \vec{j} + x \cdot (\vec{i} \pm \cot \alpha \cdot \vec{k}).$$

5 Die Parabel

Wir wenden uns nun dem bislang ausgeschlossenen Fall zu, daß der Schnittwinkel der Ebene mit dem halben Öffnungswinkel des Kegels übereinstimmt. Es sei also nun $\gamma = \alpha$. Dafür geht die Ausgangsgleichung (12) für die Schnittfiguren in die *Scheitelgleichung*

$$\xi^2 = 2z_0 \tan \alpha \sin \alpha \cdot (\eta - \eta_0) \quad (53)$$

einer Parabel über. Die Verschiebung des Scheitelpunktes S auf der η -Achse ist

$$\eta_0 = -\frac{z_0}{2 \cos \alpha}. \quad (54)$$

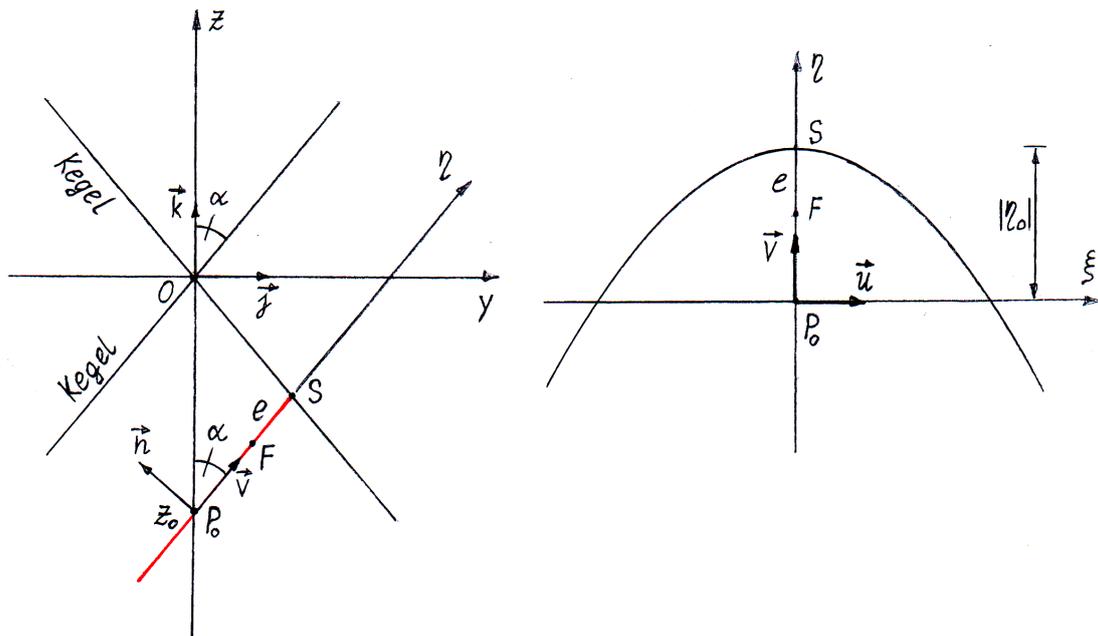


Abbildung 8: Die Parabel als Schnittfigur. Dargestellt ist ein Doppelkegel mit dem halben Öffnungswinkel $\alpha = 40^\circ$. Es ist $\gamma \equiv \sphericalangle OP_0S = \alpha$. Damit die im rechten Teil der Abbildung gezeigte, nach unten geöffnete Parabel mit $e \equiv \overline{SF} = 1 \text{ cm}$ entsteht, muß der Kegel an der Stelle $z_0 = -3,7 \text{ cm}$ geschnitten werden. Es bedeuten S: Scheitelpunkt ($\overline{P_0S} = |\eta_0|$), F: Brennpunkt ($\overline{SF} = e$). (Verkleinerungsfaktor der Abbildung: 0,83.)

Diese Scheitelgleichung haben wir mit den Gleichungen

$$\xi^2 = \text{sgn}(z_0) \cdot 4e(\eta - \eta_0)$$

für eine nach oben ($\text{sgn}(z_0) = +1$) beziehungsweise nach unten ($\text{sgn}(z_0) = -1$) geöffnete Parabel zu vergleichen. Der Vergleich ergibt

$$e = \frac{1}{2}|z_0| \cdot \tan \alpha \sin \alpha \quad (55)$$

für den stets positiv gezählten Abstand e des Brennpunktes vom Scheitelpunkt. Danach ist für einen bestimmten Kegel die Parabel durch die Schnitthöhe z_0 vollständig festgelegt. Umgekehrt ergibt sich, welche Schnitthöhe gewählt werden muß, um eine bestimmte, durch e gekennzeichnete Parabel zu erhalten (Abbildung 8).

Bei Ellipse und Hyperbel ist die *numerische Exzentrizität* übereinstimmend durch die Formel

$$\varepsilon = \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha}$$

gegeben, wobei in (22) für die Ellipse $\gamma > \alpha$ und $\varepsilon < 1$ und in (42) für die Hyperbel $\gamma < \alpha$ und $\varepsilon > 1$ gilt. Für $\gamma = \alpha$ erhalten wir übereinstimmend den Wert

$$\varepsilon = \left. \frac{\cos \gamma}{\cos \alpha} \right|_{\gamma=\alpha} = 1,$$

den wir nun der Parabel zuordnen.

Besondere Punkte der Parabel Wir betrachten den Scheitelpunkt und den Brennpunkt der Parabel näher.

- *Scheitelpunkt*: Der Ortsvektor des Scheitelpunktes ist in der (ξ, η) -Ebene

$$\vec{s}_S = \eta_0 \cdot \vec{v} \quad (56)$$

und im Raum

$$\vec{r}_S = \frac{z_0}{2} (-\tan \alpha \cdot \vec{j} + \vec{k}), \quad (57)$$

wobei daran erinnert sei, daß z_0 und $-\tan \alpha$ – nach (54) – auch η_0 vorzeichenbehaftet sind.

Der Betrag von \vec{r}_S ist $|\vec{r}_S| = |\eta_0|$, wie es auch sein sollte, denn für $\gamma = \alpha$ ist das Dreieck $\triangle OP_0S$ von Abbildung 8 (linker Teil) gleichschenkelig. Damit resultiert

$$\cos \sphericalangle(\vec{r}_S, \vec{k}) = \operatorname{sgn}(z_0) \cdot \cos \alpha;$$

der Scheitelpunkt liegt auf dem Kegelmantel.

- *Brennpunkt*: Die Lage des Brennpunktes wird durch

$$\vec{s}_F = [\eta_0 + \operatorname{sgn}(z_0) \cdot e] \cdot \vec{v} = -\frac{z_0}{2} \cos \alpha \cdot \vec{v} \quad (58)$$

oder

$$\vec{r}_F = \frac{z_0}{2} [-\sin \alpha \cos \alpha \cdot \vec{j} + (1 + \sin^2 \alpha) \cdot \vec{k}] \quad (59)$$

beschrieben.

6 Punkt, Doppelgerade und Geradenpaar

Abschließend ist noch der Fall zu diskutieren, daß die Schnittebene durch die Spitze des Doppelkegels geht. Dann ist $z_0 = 0$, also $\vec{r}_0 = \vec{0}$. Wir beginnen wieder mit der Ausgangsgleichung (12). Mit $c = \tan \alpha$ und $z_0 = 0$ erhalten wir nach wenigen Umformungsschritten

$$\xi^2 = \frac{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} \cdot \eta^2. \quad (60)$$

Welche Schnittfiguren sich daraus ergeben, hängt vom Verhältnis der Winkel α und γ zueinander ab. Wir unterscheiden drei Fälle, die hinsichtlich der γ -Intervalle mit der Ellipse, der Parabel und der Hyperbel korrespondieren.

$$1. \alpha < \gamma \leq \frac{\pi}{2}; \quad \cos \alpha > \cos \gamma$$

In diesem γ -Intervall ist der Faktor vor η^2 und damit das Quadrat von ξ negativ. Mit reellen Werten ist diese Gleichung nur durch $\xi = 0 = \eta$ zu erfüllen. Da außerdem $z_0 = 0$ ist, haben wir mit (10) schließlich $\vec{r} = \vec{s} = \vec{0}$. Die „Schnittfigur“ ist der im Koordinatenursprung, also in der Kegelspitze befindliche Punkt P_0 .

$$2. \alpha = \gamma$$

Hier resultiert $\xi = 0$ für alle η . Die Schnittfigur ist die η -Achse $\vec{s} = \eta \vec{v}$, die nach (10) mit $z_0 = 0$ die Ursprungsgerade

$$z = \cot \alpha \cdot y \tag{61}$$

in der (y, z) -Ebene ist. Die Schnittfigur ist also die *eine* Gerade, entlang derer sich Kegelmantel und Schnittebene berühren.

$$3. \gamma < \alpha; \quad \cos \gamma > \cos \alpha$$

In diesem Fall ist der Vorfaktor von η^2 in (60) positiv. Wir erhalten also

$$|\xi| = \frac{\sqrt{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} |\eta|.$$

Nach sorgfältiger Betrachtung der Vorzeichen-Kombinationen von ξ und η in den vier Quadranten der Koordinatenebene erhalten wir als Schnittfigur *zwei* Geraden im Raum, die durch

$$\vec{r} = x \cdot \frac{\cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}} \left[\frac{\sqrt{\cos^2 \gamma - \cos^2 \alpha}}{\cos \alpha} \cdot \vec{i} \pm (\sin \gamma \cdot \vec{j} + \cos \gamma \cdot \vec{k}) \right] \tag{62}$$

beschrieben werden. Aufgefaßt als Punkt-Richtungs-Gleichung der Geraden, können wir $\lambda = x$ als Parameter wählen.

Bei Annäherung des Winkels γ an $\gamma = \alpha$ verschmelzen diese beiden Geraden schließlich zu der einen Geraden (61), die dadurch als *Doppelgerade* in Erscheinung tritt..

Für $\gamma = 0$ haben wir speziell

$$\vec{r} = x \cdot (\vec{i} \pm \cot \alpha \cdot \vec{k}),$$

also die beiden Geraden $z = \pm \cot \alpha \cdot x$ in der (x, z) -Ebene.

Literatur

[Simmons 1996] Simmons, G.F.: *Calculus With Analytic Geometry*, McGraw-Hill N.Y. 1996 (2. Aufl.)

[Willers 1965] Willers, F.A.: *Elementarmathematik – Ein Vorkurs zur Höheren Mathematik*, Verl. Theodor Steinkopff Dresden, Leipzig 1965 (12. Aufl.)