

Wie gut bereitet der Mathematik-Unterricht auf ein Studium der Physik vor?

Karl-Heinz Lotze, Jena

(2006)

Gegenstand dieses Aufsatzes¹ ist das Verhältnis der Schulfächer Mathematik und Physik. Aus der Sicht jahrelanger Erfahrungen mit Physikstudenten des ersten Semesters soll die Frage beantwortet werden, wie gut der Mathematikunterricht der Schule auf ein Physikstudium vorbereitet.

Bei den dabei aufgezeigten Defiziten handelt es sich nicht nur um mangelhafte Beherrschung des Handwerklichen und schon gar nicht um fehlende Inhalte in den Mathematik-Lehrplänen. Vielmehr ist die Herabsetzung der Mathematik gegenüber dem Experiment im Physikunterricht die Hauptursache für das gestörte Verhältnis beider Fächer mit fatalen Auswirkungen auf die Studierfähigkeit von Physikstudenten.

Es werden Beispiele gegeben, die zeigen sollen, daß auch in der Schule ein Physikverständnis ohne Mathematik nicht denkbar ist.

1 Mathematik für den Physikunterricht in der Schule: Defizite, Wünsche und ein Blick in die Geschichte

Es gibt keine Wissenschaft, die sich nicht an der Kenntnis der Phänomene entwickelte, aber um Gewinn aus den Kenntnissen ziehen zu können, ist es unerlässlich, Mathematiker zu sein.

DANIEL BERNOULLI

Das Verhältnis der beiden *Schulfächer* Physik und Mathematik scheint gegenwärtig erheblich gestört zu sein. Während die sinnvolle, wenngleich auch nicht neue Forderung erhoben wird, über den Tellerrand des eigenen Faches hinauszublicken und Physik in fächerübergreifenden Zusammenhängen zu unterrichten, findet gleichzeitig eine bewußte Abgrenzung von der dafür wichtigsten Partnerin der Physik statt – der Mathematik.

Von Seiten der Fachdidaktik wird der Vorwurf erhoben, die Physik werde „zerrechnet“, Lehrplankommissionen formulieren die „Entmathematisierung“ des Physikunterrichts als Ziel, und sogar die Forderung eines „absoluten Formelverbots bis zum Ende der Jahrgangsstufe 10“ wurde laut.

Etwas moderater heißt es, daß im Zentrum des Physikunterrichts das Experiment zu stehen habe und die Mathematik in ihm auf das unbedingt Notwendige zu reduzieren sei. Wer so ar-

¹Veröffentlicht in *Praxis der Naturwissenschaften/Physik in der Schule* 55(2006)(5)8-17

gumentiert, beruft sich gern auf den Meraner Bericht über Reformvorschläge der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte vom Jahre 1905 [1]. Darin heißt es: „*Die Physik ist im Unterricht nicht als mathematische Wissenschaft, sondern als Naturwissenschaft zu behandeln.*“

Zunächst muß diese Forderung in ihrem historischen Entstehungszusammenhang verstanden werden. In einer Zeit, in der sich naturwissenschaftliche Disziplinen wie die Physik als eigenständige Unterrichtsfächer etablierten, war es freilich weder nötig noch zweckmäßig, ihre Inhalte weiterhin lediglich als Übungsbeispiele im Rahmen des Mathematikunterrichts zu vermitteln.

Sodann schließt die Behandlung der Physik als Naturwissenschaft die Mathematik nicht aus, sondern ein. In dem zitierten Bericht heißt es nämlich auch, daß „*die Fähigkeit zur mathematischen Betrachtung und Auffassung der Vorgänge in der Natur und in den menschlichen Lebensverhältnissen geweckt und gekräftigt werden*“ muß.

Wenige Jahre später setzte sich GRIMSEHL mit o.g. Grundsatz für die Erteilung des Physikunterrichts auseinander [2]: Die „*Warnung vor dem Mißbrauch der Mathematik darf nicht so aufgefaßt werden, als ob man dahin streben sollte, die Mathematik völlig aus dem Physikunterricht zu verbannen. Das hieße 'das Kind mit dem Bade ausschütten'. Im Gegenteil ist die Mathematik eines der wichtigsten Hilfsmittel, deren sich die wissenschaftliche physikalische Forschung und demnach auch der physikalische Unterricht bedienen muß. Die Physik kann an passender Stelle sogar dazu dienen, mathematische Begriffe einzuführen.*“

GRIMSEHL fordert auch, daß die von der Physik benötigten mathematischen Inhalte nicht erst im Physikunterricht selbst entwickelt werden, sondern als Vorleistung durch den Mathematikunterricht zu erbringen sind. Angesichts einer heute eher wieder reduzierten Stundenzahl für den Physikunterricht gewinnt diese Forderung nur noch an Bedeutung. Ihre Realisierung verlangt aber eine Feinabstimmung der Lehrpläne beider Fächer, die vielerorts jedoch nicht einmal versucht wird.

Zweifellos: Man kann den Physikunterricht „zerrechnen“. Im einfachsten Fall stellt man Aufgaben, die das physikalische Verständnis nicht befördern. Auch sind aus der Sicht mancher Physiklehrer Rechenübungen bequemer als ein aufwendiger experimenteller Unterricht, und viele Lehrer, die gern Schülerexperimente durchführen würden, schrecken wegen der großen Schülerzahl in ihrer Klasse davor zurück. Umgekehrt: Schülerexperimente werden nicht immer wegen ihres Bildungswertes durchgeführt, sondern manchmal auch mit der Begründung: „*Laß' sie experimentieren, da sind sie wenigstens beschäftigt.*“

Überblickt man etwa die letzten fünfzehn Jahre, werden seitens der Universitäten als Antwort auf die im Titel dieses Aufsatzes gestellte Frage, wie gut der Mathematikunterricht der Schule auf ein Physikstudium vorbereitet, wachsende Defizite konstatiert. Nach Ansicht des Verfassers werden diese Defizite nicht primär vom Mathematikunterricht selbst verursacht, sondern durch die marginale Rolle, die der Mathematik im Physikunterricht zugewiesen wird. Und diese wiederum geht auf ein falsch verstandenes Verhältnis von Experiment und Mathematik (oder allgemeiner: auch anders artikulierten *Ideen* der Physik) zurück.

Hinzu kommt, daß eine wachsende Zahl von jungen Physiklehrern die Mathematik nicht als ihr zweites Lehrfach gewählt hat. Nicht selten war für sie die Mathematik nicht mehr als jenes Übel, das notwendig ist, um die Anforderungen des Physikstudiums zu bewältigen. Das Erlebnis, wie beide Wissenschaften einander bedingen und durchdringen, blieb ihnen verborgen, und so können sie es auch ihren Schülern nicht vermitteln. Dem Physikunterricht wäre sehr geholfen, wenn man zu der Forderung zurückkehrte, daß jeder Physiklehrer auch Mathematiklehrer sein soll.

Was nun den Mathematikunterricht selbst angeht, so sind die bereits erwähnten Defizite

Ein Mathematik-Lehrplan von 1836

1. Komplexe Zahlen
2. Reihen (einschließlich Konvergenz, Reihenumkehr, Entwicklung gebrochenrationaler Funktionen in Reihen)
3. Binomischer Lehrsatz
4. Exponential-, Logarithmus-, Kreis und Hyperbelfunktionen, ihre Entwicklung in Reihen
5. Fakultäten, unendliche Produkte, Kettenbrüche
6. Differentialrechnung
7. Integralrechnung
8. Ebene und sphärische Trigonometrie
9. Analytische Geometrie der Ebene und des Raumes
10. Polarkoordinaten
11. Kegelschnitte
12. Flächen zweiter Ordnung, Krümmung von Kurven
13. Spezielle Kurven (Zykloiden, Spiralen u.a.)
14. Angewandte Mathematik und praktische Geometrie

Abbildung 1: Mathematik-Lehrplan für die Oberstufe am Gymnasium Ernestinum, Gotha 1836 (nach [3]).

nicht primär durch eine Veränderung der Inhalte in den Curricula verursacht. Die Mathematik ist ja nicht wie die Physik durch das Experiment eingeschränkt, so daß die für die Physik bedeutsamen Inhalte nur ein Teil der für die Mathematik interessanten Strukturen sind. Und so kann folglich die Herstellung der Studierfähigkeit in den Naturwissenschaften, die nicht aus dem Auge verloren werden darf, nicht das einzige Kriterium für die Inhaltsauswahl sein. Gleichwohl ist es interessant, diesbezüglich einen Blick in die Geschichte zu werfen (Abb. 1). Waren auch nach dem Zweiten Weltkrieg noch Themen wie komplexe Zahlen, Taylor-Polynome und sphärische Trigonometrie Gegenstände der Schulmathematik, gab es diese zur Schulzeit des Verfassers schon nicht mehr. Längst sind auch die Kegelschnitte aus der Schule verbannt.

Dafür hat die Stochastik Eingang in die Schulcurricula gefunden, die ja auch für die Physik von Bedeutung ist, wenngleich sie um derentwillen sicher nicht eingeführt wurde. Man wird darauf achten müssen, daß diese Disziplin nicht zu stark die Analysis mit ihrem enormen Potential für die Beschreibung von Naturvorgängen dominiert.

Auch sollte die Geometrie eher gestärkt werden, obwohl oder gerade weil es Stimmen gibt, die behaupten, die Sätze der Dreieckslehre seien in der Schule entbehrlich, da Aufgaben dieser Art in der späteren Berufspraxis nicht wiederkehren werden – als ob es darum ginge! Zitieren wir lieber EINSTEIN [4], der auf der ersten Seite seiner populären Darstellung der Speziellen und Allgemeinen Relativitätstheorie (eines Physikbuches!) vom „*stolzen Gebäude der Geometrie Euklids*“ spricht, an das sich jedermann, wenn nicht mit Liebe, so doch mit Achtung erinnert.

Wir kommen nun zu denjenigen der bereits erwähnten Defizite, deren Ursache *nicht* darin liegt, daß der eine oder andere gewünschte Inhalt nicht oder nicht mehr Gegenstand des Schulunterrichts ist.

- Wir nennen zuerst die mangelhafte Beherrschung des Handwerklichen, angefangen von der algorithmischen Manipulation einfacher algebraischer Gleichungen über den sauberen Umgang mit physikalischen Größen als Produkten aus Maßzahl und -einheit bis hin zur Handhabung von Regeln der Differentialrechnung. Dieser Zustand ist zum großen Teil eine Folge des unbewältigten Stoff-Zeit-Problems, wobei Üben, Festigen und Wiederholen in verschiedenen Kontexten auf der Strecke bleiben. Die Einführung eines „Faches“ Naturwissenschaften nicht zusätzlich, sondern auf Kosten des Erwerbs fachspezifischer Fähigkeiten und Fertigkeiten würde diesen Mißstand nur erhöhen.

Genannt seien auch die fehlende Sicherheit im Umgang mit den Logarithmengesetzen einschließlich Basiswechsel. Die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen sind vielen angehenden Studenten nicht bekannt, ja nicht einmal die Cotangens-Funktion. Wie sie selbst sagen, haben sie diese Funktionen nur als „Tasten auf dem Taschenrechner“ kennengelernt, besitzen jedoch keine Vorstellung vom Aussehen der zugehörigen Graphen oder anderen Eigenschaften.

Aus der Vektorrechnung fehlt einem Teil der Studenten das Vektorprodukt, und beim Rechnen mit Vektoren werden diese oft viel zu früh in Komponenten zerlegt. Und daß auch das räumliche Vorstellungsvermögen zu den Defiziten gehört, mag wohl daran liegen, daß man technisches Zeichnen und darstellende Geometrie heute ganz Coputerprogrammen überläßt.

- Nicht wenige Schüler schätzen rückblickend ein, sie hätten das Gefühl gehabt, ein physikalisches Problem verstanden zu haben, weil sie in der Lage waren, die daraus resultierende mathematische Aufgabe zu lösen. Man soll diese Phase der Problemlösung nicht unterschätzen! Jedoch erschöpft sich physikalisches Verständnis längst nicht darin. Wenn manche dieser Schüler noch in der Lage sind, die Voraussetzungen zu benennen, die in die Formulierung des mathematischen Problems eingegangen sind, können weit weniger von ihnen auf die Frage antworten, ob das Ergebnis physikalisch sinnvoll ist. Dies würde nämlich voraussetzen, daß *vor* der mathematischen Behandlung eine physikalische Erwartung an die Lösung (Abhängigkeiten, Größenordnungen usw.) formuliert wird. Eine Dimensionsanalyse könnte dabei sehr hilfreich sein (siehe z.B. [5]). Jeder Physiklehrer sollte daher „WHEELERS Erste Verhaltensregel“ [6] in den Kanon seiner didaktischen Grundsätze aufnehmen: „*Never start a calculation before you know the answer.*“

Vor der Versuchung, ein physikalisches Problem vorschnell als gelöst oder verstanden anzusehen, kann uns eine Flucht in das Experiment aber *nicht* retten. Wirkliche physikalische Bildung muß die „*Gefahr des Eindrucks, man verstehe die Dinge, wenn man etwas damit hantieren kann*“ (F. HUND [7]), vermeiden.

- Bei angehenden Physikstudenten ist die Fähigkeit schwach entwickelt, physikalische Aus-

sagen mathematisch zu formulieren oder mathematische Ausdrücke inhaltlich verstehend zu lesen sowie aus ihnen den physikalischen Gehalt zu extrahieren und diesen in ihrer *Alltagssprache* wiederzugeben. Noch weniger entwickelt ist die Fähigkeit oder auch nur das Bedürfnis, etwa durch Untersuchung von Spezialfällen in den mathematischen Formeln selbst Anschaulichkeit zu suchen. Diese Tugenden können und sollten schon auf dem elementarsten Niveau und nicht erst mit Blick auf die Hochschule im Unterricht trainiert werden!

- Immer deutlicher werden die nicht immer segensreichen Folgen des Einsatzes programmierbarer Taschenrechner in der Schule. Folgt man einigen seiner Befürworter, ist die eben angesprochene Beherrschung des Handwerklichen gar nicht mehr nötig, denn wozu soll man Ableitungen bilden können, wenn doch das ganze Resultat einer Kurvendiskussion auf dem Display angezeigt wird. Stattdessen könne man „auf höherer Ebene“ ganze Kurvenverläufe miteinander vergleichen usw. Die Erfahrung zeigt, daß manche angehende Studenten glauben, etwas *besser* verstanden zu haben, weil sie in der Lage sind, mit Hilfe des Taschenrechners eine Lösung *schneller* zu präsentieren als jemand, der sie aus eigener Kraft finden muß.

Als Reaktion auf diese Situation wurden in den vergangenen fünfzehn Jahren an nahezu allen Universitäten „Brückenkurse“ eingerichtet, die die Aufgabe haben, so gut es geht die genannten Defizite auszugleichen und behutsam neue Inhalte einzuführen. Daraus ist auch eine umfangreiche, diesem Ziel dienende Literatur hervorgegangen ([8] ... [14]). Der Verfasser hat an der Physikalisch-Astronomischen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena seit 1997 die Aufgabe, einen solchen „Mathematischen Vorkurs für Studienanfänger“ zu unterrichten, zu dem die Studenten des ersten Semesters noch vor Beginn ihres Studiums an die Universität kommen. Der Kurs umfaßt zwanzig Doppelstunden Vorlesungen und zehn Doppelstunden Übungen, die in kleinen Gruppen von ca. fünfzehn Studenten von älteren Kommilitonen als Tutoren betreut werden. Der Inhalt ist in Abb. 2 dargestellt. Ein Vergleich mit Abb. 1 zeigt, daß der größte Teil davon Schulstoff sein könnte und es z.T. sogar war.

Mathematik – Ein Vorkurs für Studienanfänger

1. Die Exponentialfunktion
2. Komplexe Zahlen
3. Aus der Vektorrechnung: Skalar- und Vektorprodukt
4. Kegelschnitte
5. Differentialrechnung mit einer Variablen
6. Differentialrechnung mit zwei und drei Variablen. Der Gradient
7. Rechnen mit kleinen Größen
8. Integralrechnung

Abbildung 2: Inhalt des Vorkurses „Mathematik für Studienanfänger“ in den Fachrichtungen Physik-Diplom, Technische Physik, Physik-Lehramt und Werkstoffwissenschaften an der Friedrich-Schiller-Universität Jena

2 Mathematik für das Physikstudium an der Hochschule: Das ewige Synchronisationsproblem

Auch meinte ich in meiner Unschuld, daß es für den Physiker genüge, die elementaren mathematischen Begriffe klar erfaßt und für die Anwendungen bereit zu haben, und daß der Rest in für den Physiker unfruchtbaren Subtilitäten bestehe – ein Irrtum, den ich erst später mit Bedauern einsah.

ALBERT EINSTEIN

Wer Physik studieren will, hat sich vorgenommen, im Buch der Natur zu lesen und ihm im Laufe seines Lebens vielleicht eine Seite hinzuzufügen. Dazu ist es unerlässlich, daß er die Sprache lernt, in der dieses Buch geschrieben ist. Das ist – so sagt es schon GALILEI – die Mathematik.

Die Mathematikausbildung der Physikstudenten liegt unbestritten in der Kompetenz der mathematischen Fakultäten. Die ihr eigene Gründlichkeit im Aufbau der Mathematik und der mathematischen Beweisführung ist auch für den künftigen Physiker unverzichtbar. Ob dabei auch „handwerkliche“ Fähigkeiten wie etwa Lösungsmethoden von Differentialgleichungen vermittelt werden, hängt nicht selten von den Lehrpersonen ab. Aber in jedem Fall braucht dies Zeit, die vergeht, während die Physik vom ersten Tage an solche Fähigkeiten verlangt. Dieses Synchronisationsproblem ist seit Generationen ungelöst.

Es wäre weder praktikabel noch entspräche es der Motivation der Studenten, dem Physikstudium ein Studium der Mathematik vorzuschalten. So haben von jeher Physikstudenten in ihren ersten Semestern die Doppelanforderung zu bewältigen, gleichzeitig Physik und Mathematik studieren zu müssen – und nicht wenige scheitern daran.

Mathematische Methoden für Physiker

Erstes Semester

1. Anwendungen der Integralrechnung in der Physik
2. Gewöhnliche Differentialgleichungen

Zweites Semester

1. Vektoranalysis: Differentialoperatoren und Integralsätze
2. Krummlinige Orthogonalkoordinaten
3. Die eindimensionale, homogene Wellengleichung
4. Matrizen in der GAUSSschen Optik
5. Verteilungsfunktionen und Mittelwerte
6. FOURIER-Reihen und FOURIER-Transformationen

Abbildung 3: Inhalt der Vorlesung „Mathematische Methoden für Physiker“ für Studenten des ersten und zweiten Semesters an der Physikalisch-Astronomischen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena

Angesichts dieser Situation ist die Verantwortung der Schule für die künftigen Studenten offensichtlich: Je solider und anwendungsbereiter der Mathematikunterricht war, den ein Student in seiner Schulzeit genossen hat, desto mehr kann er sich an der Universität von Anfang an auf die Physik als sein Hauptfach konzentrieren.

Auch haben wir hier ein zweites Motiv für die Einführung der o.g. Brückenkurse. Auf Anregung der Studenten ist der Vorkurs des Verfassers als zweisemestrige Vorlesung weitergeführt worden, deren Inhalt aus Abb. 3 ersichtlich ist. Diese von der Physik mitgetragene Mathematikausbildung der Physikstudenten hat sich wegen ihrer größeren Nähe zum Physikcurriculum der Anfangssemester bewährt. Im günstigsten Falle hat sie auch positive Auswirkungen auf das Mathematikstudium selbst, da das mit der Beherrschung von Lösungsmethoden einhergehende Selbstvertrauen den Kopf des Studenten für die subtileren Aspekte der Mathematik freimachen kann.

Mit der Einführung modularisierter Studiengänge und dem damit verbundenen viel zu frühen Beginn der Theoretischen Physik bereits im zweiten Semester wurde die Vorlesung mit gewöhnlichen Differentialgleichungen und Vektoranalysis als einzig verbliebenen Inhalten auf ein Semester reduziert, dafür aber um Übungen und eine Prüfung erweitert.

3 Fünf Beispiele für die Nützlichkeit der Mathematik in einem allgemeinbildenden Physikunterricht

In der Physik und im Physikunterricht begegnet uns die Mathematik auf verschiedene Art.

Auf einer frühen Stufe des Unterrichts geht es zunächst um das Auffinden von Zusammenhängen im Experiment. Dies ist von eigenem Wert, und viele Schüler kommen – sofern sie nicht die Oberstufe des Gymnasiums besuchen – über diese Stufe nicht hinaus. In vielen Schulklassen wird dem Schüler dabei auch heute noch suggeriert, daß allein durch Sorgfalt beim Experimentieren und gründliches Nachdenken Naturgesetze gefunden werden können. Was wir jedoch aus dem Experiment erhalten, ist ein Meßprotokoll, kein Naturgesetz.

Alle Experimente sind „Fragen an die Natur“, die bereits durch Ideen inspiriert sind, welche manchmal schon mathematisch formuliert werden. Die Ideen kommen also *vor* dem Experiment. Die Antworten der Natur nehmen wir erst recht in mathematischer Gestalt entgegen: als Tabellen, Diagramme oder Formeln wie z.B. Regressionsgeraden. (Die Bewältigung von Realdaten ist übrigens eine besonders sinnvolle Anwendung des Taschenrechners.)

Mit zunehmendem Alter wächst das Orientierungsbedürfnis der Schüler, und der Physikunterricht hat die Aufgabe, ihr Wissen zu ordnen, zu systematisieren und z.B. mit Hilfe von Analogien oder übereinstimmenden mathematischen Strukturen Zusammenhänge aufzuzeigen. Für die Rolle, die die Mathematik in den Naturgesetzen spielt, sollen nachfolgend fünf Beispiele gegeben werden, deren Sinn nicht darin besteht, *einige* Schüler vorzeitig zu Physikern *auszubilden*, sondern *alle* durch Mathematik und Physik zu *bilden*. Alle Beispiele liegen in der Reichweite der Mathematik der gymnasialen Oberstufe, ohne daß neue Inhalte eingeführt werden müßten.

3.1 Der freie Fall und die Differentialrechnung

Jedermann, der etwas von der Sache versteht, wird zustimmen, daß sogar die Grundlage, auf der die wissenschaftliche Erklärung der Natur beruht, nur jenen verständlich ist, die wenigstens die Elemente der Differential- und Integralrechnung wie auch der analytischen Geometrie gelernt haben.

FELIX KLEIN

War die Beschreibung der nicht-gleichförmigen Bewegung – historisch gesehen – ein Motiv für die Erfindung des Infinitesimalkalküls durch NEWTON, ist die Bewegungslehre noch heute eine große Hilfe bei der Einführung und Aneignung der Grundbegriffe dieser mathematischen Disziplin. Darauf haben u.a. GRIMSEHL [2] und HUND [7] hingewiesen. Der Verfasser hat zu seiner Schulzeit von dem namhaften Sonneberger Astronomen C. HOFFMEISTER die Anregung empfangen, durch das Studium des freien Falls die Differentialrechnung zu lernen.

Tatsächlich ist der freie Fall hervorragend geeignet, die Grundidee der Differentialrechnung zu verdeutlichen und ein Verständnis auch für ihre LEIBNIZsche Notation zu erzeugen. Dazu vermessen wir die stroboskopische Aufnahme von Abb. 4, in der die einzelnen Belichtungen des frei fallenden Körpers in Zeitintervallen $\Delta t = \frac{1}{30}$ s aufeinander folgen. In Tab. 1 und in Abb. 5 stellen wir den nach n solchen Zeitintervallen zurückgelegten Fallweg s_n und außerdem die ersten und zweiten Differenzenfolgen

$$\Delta s_n = s_{n+1} - s_n$$

bzw.

$$\Delta(\Delta s_n) \equiv \Delta^2 s_n = \Delta s_{n+1} - \Delta s_n = s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n$$

dar.

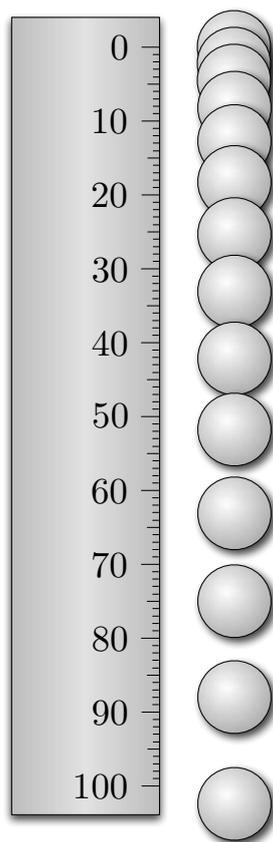


Abbildung 4: Stroboskopische Aufnahme eines frei fallenden Körpers. Das Zeitintervall zwischen zwei Belichtungen beträgt $\frac{1}{30}$ s.

Wir erkennen, daß im Rahmen der Ablesegenauigkeit die zweite Differenzenfolge mit dem Mittelwert $\Delta^2 s_n = 1,09$ cm konstant ist. Dies verlangt einen quadratischen Weg-Zeit-Zusammenhang, den wir in der Form

$$s_n = b(n \cdot \Delta t)^2 \quad (1)$$

mit b als einer Konstanten ansetzen. Nur dieser Ansatz garantiert, daß die zweite Differenzenfolge von n unabhängig wird. (Es ist lehrreich, Ansätze mit anderen Exponenten einfach auszuprobieren.) Der Zusammenhang zwischen dem „Gesetz“ (1) – aufgefaßt im wörtlichen Sinn als etwas von uns Gesetztes – und den fehlerbehafteten Meßwerten, die im Einzelfall durch dieses Gesetz nie genau erfaßt werden, wird von WAGENSCHNEIN in dessen Abhandlung [15] über das Fallgesetz ausgezeichnet beschrieben.

Als *erste* Differenzenfolge erhalten wir zunächst

$$\Delta s_n = (2n + 1) \cdot b(\Delta t)^2,$$

so daß sich die in gleichen Zeitabständen zurückgelegten Wege zueinander wie die ungeraden Zahlen verhalten,

$$\Delta s_0 : \Delta s_1 : \Delta s_2 : \dots = 1 : 3 : 5 : \dots$$

Diese Eigenschaft des freien Falls hebt WAGENSCHNEIN als eine jedem Kind verständliche hervor, welches das „Knabenalter“ erreicht hat, während er – uns nicht einleuchtend – den Weg-Zeit-Zusammenhang (1) lediglich eine „Scheinblüte“ und „Papierblume“ nennt.

n	s_n/cm	$\Delta s_n/\text{cm}$	$\Delta(\Delta s_n)/\text{cm}$
0	0	–	–
1	?	?	?
2	2,4	2,3	1,3
3	4,7	3,6	0,8
4	8,3	4,4	1,2
5	12,7	5,6	1,3
6	18,3	6,9	0,9
7	25,2	7,8	1,1
8	33,0	8,9	1,0
9	41,9	9,9	1,4
10	51,8	11,3	0,7
11	63,1	12,0	0,9
12	75,1	12,9	1,7
13	88,0	14,6	0,7
14	102,6	15,3	1,2
15	117,9	16,5	1,1
16	134,4	17,6	–
17	152,0	–	–

Tabelle 1: Die Fallwege sowie die erste und zweite Differenzenfolge aus Abb. 4.

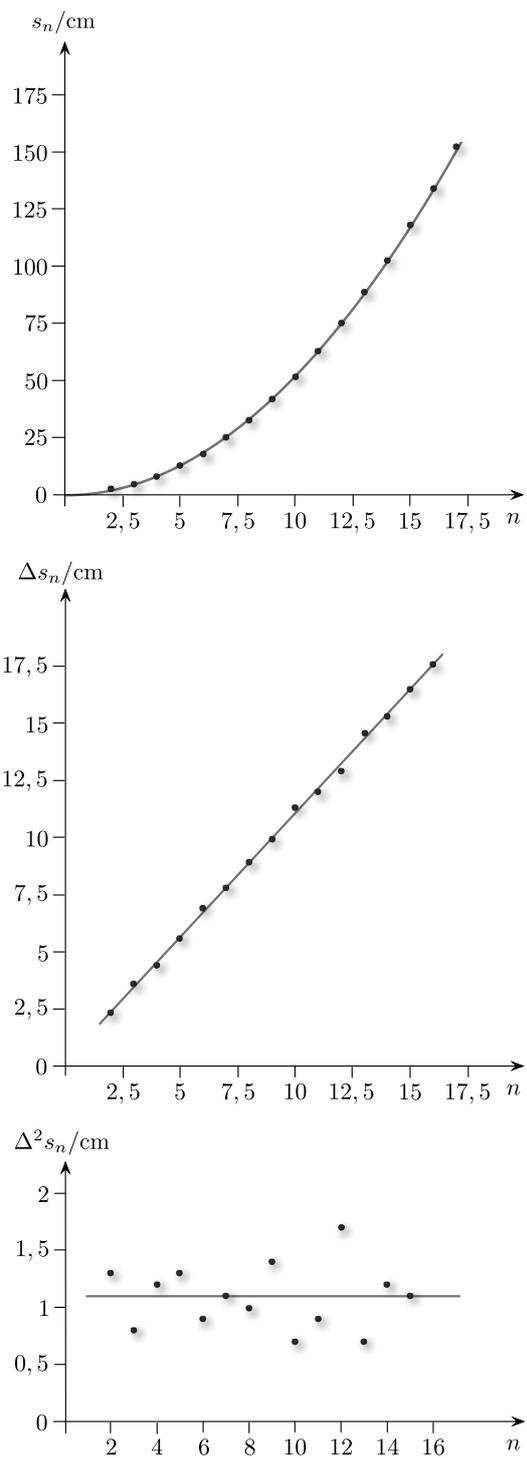


Abbildung 5: Graphische Darstellung der Meßwerte von Tab. 1.

Die *zweite* Differenzenfolge wird mit dem Ansatz (1) von n unabhängig, denn es ist

$$\Delta^2 s_n = 2b(\Delta t)^2 = \text{const.}$$

Die Konstante $2b$ ergibt sich mit unseren Zahlenwerten zu

$$2b = \frac{\Delta^2 s_n}{(\Delta t)^2} = \frac{1,09 \text{ cm}}{\left(\frac{1}{30} \text{ s}\right)^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

ist also die konstante Schwerebeschleunigung g nahe der Erdoberfläche. Machen wir die Zeitintervalle Δt immer kleiner, wird daraus

$$g = \frac{d^2 s}{(dt)^2} \equiv \frac{d^2 s}{dt^2},$$

und der Unabhängigkeit der zweiten Differenzenfolge von n , wenn s_n durch (1) gegeben ist, entspricht die Konstanz der zweiten Zeitableitung im Falle einer quadratischen Weg-Zeit-Funktion.

3.2 Differentialgleichungen in der Schule?

Wie verstanden die Alten das Naturgesetz? Für sie war es immer eine innere Harmonie, sozusagen statisch und unveränderlich; oder es war ein Idealbild, dem nachzustreben die Natur sich bemühte. Für uns hat ein Gesetz nicht mehr diese Bedeutung; es ist eine unveränderliche Beziehung zwischen der Erscheinung von heute und der von morgen; mit einem Wort: es ist eine Differentialgleichung.

HENRI POINCARÉ

Es soll hier *kein* Plädoyer dafür vorgetragen werden, in der Schule Differentialgleichungen und deren Lösungsmethoden systematisch zu behandeln. Gleichwohl treten uns die Naturgesetze als Differentialgleichungen entgegen, so daß die Frage legitim erscheint, ob man sie nicht wenigstens exemplarisch erörtern kann. Zwei Beispiele kommen einem sofort in den Sinn, die nicht nur mit Hilfe der Schulmathematik behandelbar sind, sondern zugleich eine große physikalische Bedeutung haben.

Das erste Beispiel ist die gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$y' = cy, \quad c = \text{const}, \quad (2)$$

die immer dann in Erscheinung tritt, wenn die Zunahme ($c > 0$, Wachstum) oder Abnahme ($c < 0$, Zerfall) einer physikalischen Größe zu dieser selbst proportional ist. Dies ist z.B. der Fall, wenn y die Intensität I des durch einen Glasblock hindurchtretenden Lichtes, die Anzahl N radioaktiver Atome (mit der Zeit t als unabhängiger Variabler) oder die Ladung Q eines sich über einen Ohmschen Widerstand entladenden Kondensators bedeutet. Auch in dem weniger bekannten Fall der Konstruktion einer gläsernen „Gravitations“-Linse tritt diese Differentialgleichung auf [16].

Was in der Schule nicht sein kann, sollte auch an der Hochschule vermieden werden: ein *zu rascher* Zugriff auf Routineverfahren wie Trennung der Variablen, spezielle Ansätze usw. Stattdessen soll der Schüler oder Student *in Worten* die Frage formulieren, die in (2) zum Ausdruck gebracht wird: Kennst du eine Funktion, die die Eigenschaft hat, daß sie (bis auf eine Konstante

c) mit ihrer *ersten* Ableitung übereinstimmt? Wir folgen also zunächst dem Rat von G. PÓLYA (zitiert nach [17]): „Um eine Differentialgleichung zu lösen, schaust du sie solange an, bis dir die Lösung einfällt.“ Der Verfasser weiß aus jahrelanger Erfahrung, daß viele Schüler als Antwort auf diese Frage sofort die Exponentialfunktion mit der Eulerschen Zahl e als Basis parat haben. Die Lösung von (2) ist also

$$y = Ae^{cx},$$

wobei die Konstante A schon aus Dimensionsgründen nötig ist. Sie gibt den Wert der Größe y für $x = 0$ an.

Das zweite Beispiel ist die Schwingungs-Differentialgleichung, die wir erhalten, wenn wir die Newtonsche Bewegungsgleichung mit der durch das Hookesche Gesetz gegebenen Kraft als

$$m\ddot{x} = -kx, \quad k = \text{const} \quad (3)$$

aufschreiben. Jetzt liegt eine gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung vor. Sinngemäß fragen wir wieder: Kennst du eine Funktion $x(t)$, deren *zweite* Ableitung bis auf eine Konstante mit dieser Funktion selbst übereinstimmt? In dem auch Schülern bekannten Katalog von Funktionen gibt es zwei mit der gesuchten Eigenschaft, nämlich

$$x = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad \text{und} \quad x = B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t.$$

(Die Exponentialfunktion erwähnen wir hier nicht, da sie auf komplexe Zahlen führen würde.) Wie man durch Einsetzen sofort nachprüfen kann, hat auch die Linearkombination

$$x(t) = A \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t + B \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (4)$$

die von der gesuchten Lösung geforderten Eigenschaften. Nur diese Linearkombination kann die allgemeine Lösung sein, denn auf dem Weg von der gegebenen Beschleunigung zum gesuchten Weg-Zeit-Zusammenhang entstehen zwei Integrationskonstanten, die durch die Anfangswerte $x(0)$ und $\dot{x}(0)$ des Problems festgelegt werden.

Im Sprachgebrauch der Schule wird (4) sehr oft als Schwingungsgleichung bezeichnet. Die Schwingungsgleichung ist jedoch (3), (4) ihre Lösung. Die Fachdidaktik sollte überhaupt darauf achten, daß sie keine eigene, zur Sprache ihrer Bezugswissenschaft parallele Sprache entwickelt. Auch die Eindeutschung von Fachausdrücken („Hochpunkt“ statt „lokales Maximum“ usw.) mit der Begründung, „Fremdwörter würden nur eine nicht vorhandene Wissenschaftlichkeit vortäuschen“, ist wenig hilfreich.

Wir betonen noch einmal: Aus diesen Beispielen soll der Schüler nicht die Fähigkeit erwerben, weitere Differentialgleichungen nach bestimmten Algorithmen zu lösen. Aber er lernt zweierlei:

Erstens – wider das weit verbreitete Schubladendenken: Wann immer die Änderungsrate einer Größe proportional zu dieser Größe ist, ergibt sich ein exponentielles Wachstum oder ein exponentieller Zerfall – auch z.B. in der Biologie. Auch eine Gleichung vom Typ (3) beschreibt nicht nur den Federschwinger, sondern ebenso einen elektrischen L - C -Schwingkreis, und so läßt sich die Schwingungsdauer $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ des Federschwingers mit den Ersetzungen $m \rightarrow L$, $k \rightarrow \frac{1}{C}$ direkt in die Thomsonsche Schwingungsformel $T = 2\pi \sqrt{LC}$ überführen. R.P. FEYNMAN sagt [18]: „The same equations have the same solutions.“

Zweitens – wider die weit verbreitete Unterschätzung von Integrationskonstanten: Die Gleichung (3) für den Federschwinger beschreibt viele Situationen – eine anfangs ausgelenkte und einfach losgelassene, eine anfangs entspannte, aber angestoßene Feder usw. Das diesen Vorgängen Gemeinsame ist in der Differentialgleichung codiert, ihre Individualität aber in den Integrationskonstanten A und B der Lösung (4). Damit sind für das konkrete physikalische Geschehen die Konstanten genauso wichtig wie der Teil der Lösung (4), der die Zeitabhängigkeit enthält.

3.3 Über den Umgang mit Näherungen

Obwohl dies paradox erscheinen mag, wird alle exakte Wissenschaft von der Idee der Näherung beherrscht.

BERTRAND RUSSELL

Näherungen begegnen wir in der Physik auf Schritt und Tritt. Die Bevorzugung streng lösbarer Beispiele in Schule und Hochschule führt jedoch dazu, daß nicht nur die Fähigkeit zu Näherungsbetrachtungen unzureichend oder zu spät entwickelt wird, sondern daß diese auch in ihrer grundsätzlichen (nicht nur pragmatischen) Bedeutung unterschätzt werden.

Die Schulphysik kennt ein Beispiel: die Beschränkung auf kleine Auslenkungen bei den Schwingungen eines Fadenpendels, wodurch erreicht wird, daß die in diesem Fall eigentlich nichtlineare Schwingungsgleichung linear und vom Typ (3) wird. Der „Beweis“, daß bei kleinen Auslenkungen (Faustregel: nicht größer als 5 Grad) der Sinus eines Winkels mit seinem Bogenmaß im Rahmen gewisser Genauigkeitsansprüche übereinstimmt, wird in der Regel dem Taschenrechner überlassen.

Ein anderes, in der Schule gelegentlich diskutiertes Beispiel ist die Aussage, daß der thermische Volumenausdehnungskoeffizient das Dreifache des linearen sei. Angesichts von Ausdehnungskoeffizienten der typischen Größenordnung $\alpha = 5 \cdot 10^{-5} \frac{1}{\text{grad}}$ und im Experiment realisierten Temperaturänderungen ΔT , mit denen $\alpha \Delta T \ll 1$ ist, können wir uns auf den in α linearen Term in dem binomischen Ausdruck

$$V = V_0(1 + \alpha \Delta T)^3 \approx V_0(1 + 3\alpha \Delta T)$$

beschränken.

War das Motiv für die Näherung im ersten Beispiel vor allem ein didaktisches, lag dem zweiten das Motto zugrunde: „So genau wie nötig, aber nicht so genau wie möglich“. Uns kommt es nun darauf an zu zeigen, wie tief Näherungen selbst mit den Grundlagen der Physik verwoben sind, und daß sie schon bei der Formulierung physikalischer Probleme eine Rolle spielen.

Dazu betrachten wir zuerst den freien Fall aus der Höhe z über der Erdoberfläche oder aus dem Abstand $r = R + z$ vom Erdmittelpunkt (Abb. 6). Nach dem Newtonschen Gravitationsgesetz ist die Fallbeschleunigung durch

$$m\ddot{r} = -G \frac{mM}{r^2}$$

oder

$$m\ddot{z} = -\frac{GM}{R^2} \frac{m}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)^2}$$

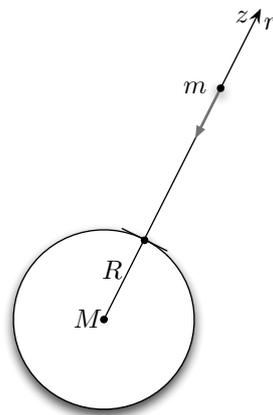


Abbildung 6: Der freie Fall eines Körpers auf den Erdmittelpunkt zu. M bedeutet die Masse der Erde, R ihren Radius. Die Koordinate r zählt vom Erdmittelpunkt, die Koordinate z von der Erdoberfläche aus.

gegeben. In dem Faktor $\frac{GM}{R^2}$ erkennen wir die Schwerebeschleunigung g an der Erdoberfläche, so daß das „Newtonsche Fallgesetz“

$$\ddot{z} = -g \frac{1}{\left(1 + \frac{z}{R}\right)^2} \quad (5)$$

lautet. Jeder Unterricht über den freien Fall beginnt jedoch mit dem „Galileischen Fallgesetz“

$$\ddot{z} = -g. \quad (6)$$

Nun kann die *eine* Fallbewegung nicht durch *zwei* verschiedene Fallgesetze beschrieben werden, so daß die Frage nach dem Zusammenhang beider entsteht. Die beiden Fallgesetze sind offenbar nur vereinbar, wenn $z = 0$ ist. Aus der Höhe $z = 0$ über der Erdoberfläche ist eine Fallbewegung aber gar nicht mehr möglich. Das Galileische Fallgesetz kann also unter keiner Bedingung streng gelten. Um zu entscheiden, unter welchen Umständen es dennoch anwendbar ist, untersuchen wir das Newtonsche Fallgesetz in der Nähe der Erdoberfläche, so daß das Verhältnis $\varepsilon \equiv \frac{z}{R} \ll 1$ ist.

Unter dieser Bedingung wird der binomische Ausdruck

$$(1 + \varepsilon)^2 = 1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2 \approx 1 + 2\varepsilon. \quad (7)$$

Solche Näherungsausdrücke lassen sich mit den Mitteln der Schulmathematik auch auf nicht natürliche Exponenten ausweiten. Durch Polynomdivision erhalten wir

$$\frac{1}{1 + \varepsilon} = 1 - \varepsilon + \varepsilon^2 - + \dots \approx 1 - \varepsilon. \quad (8)$$

(Auch für die Exponenten $\pm \frac{1}{2}$, die für die Lorentz-Faktoren der Speziellen Relativitätstheorie relevant sind, lassen sich auf so elementare Weise Näherungsformeln finden [19]).

Mit unseren beiden Näherungen (7) und (8) wird aus dem Newtonschen Fallgesetz (5)

$$\ddot{z} \approx -g \left(1 - 2\frac{z}{R}\right).$$

Nun sehen wir, welchen Fehler wir machen, wenn wir von da in gröbster Näherung zum Galileischen Fallgesetz übergehen und können entscheiden, ob wir ihn verantworten wollen. Jedenfalls: Das Galileische Fallgesetz ist eine Näherung! (Auf der Ebene der Lösungen ist die aus dem Galileischen Fallgesetz folgende Wurfparabel nicht jene Parabel, von der in den Keplerschen Gesetzen die Rede ist. Sie ist die Näherung einer Kepler-*Ellipse* mit dem Erdmittelpunkt in einem ihrer Brennpunkte in der Nähe eines ihrer Hauptscheitel.)

Das zweite Beispiel gewährt noch einmal aus physikalischer Perspektive einen Blick auf die Idee der Differentialrechnung. Es betrifft die Bewegung des Mondes um die Erde (Abb. 7). Sie

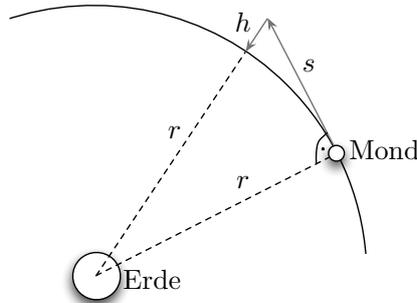


Abbildung 7: Der Fall des Mondes um die Erde

läßt sich aus zwei jedem Schüler bekannten Bewegungstypen zusammensetzen: der geradlinig-gleichförmigen Bewegung $s = v \cdot \Delta t$, die der Mond ausführen würde, könnte man die Anziehungskraft der Erde plötzlich abschalten, und dem freien Fall $h = \frac{a}{2} (\Delta t)^2$, der den Mond auf seinen Ort auf der Kreisbahn zurückholt. Nach Abb. 7 ist $(r + h)^2 = r^2 + s^2$, woraus

$$2rh \left(1 + \frac{h}{2r} \right) = s^2$$

folgt. Je kleiner das Zeitintervall Δt ist, desto besser ist die Ungleichung $\frac{h}{2r} \ll 1$ erfüllt, so daß wir schließlich $2rh = s^2$ erhalten. Mit s und h wird

$$a = \frac{v^2}{r},$$

die Beschleunigung auf einer Kreisbahn.

Diese Beispiele sollen dazu dienen, eine gedankliche Präzision einzufordern, die nicht weniger wichtig ist als das Bestreben, mit den Mitteln der Schule möglichst präzise Messungen ausführen zu wollen.

3.4 Extremalprinzipien

Der wirkliche Triumph der Wissenschaft besteht darin, daß wir einen solchen Gedankengang finden können, daß das Gesetz einleuchtend erscheint.

RICHARD P. FEYNMAN

Die Extremalprinzipien der Physik sind jene „Gedankengänge“ par excellence, die „das Gesetz einleuchtend“ erscheinen lassen, und die dem Schüler helfen können, sein Bedürfnis nach Sy-

stematisierung zu befriedigen, damit ihm die Physik nicht als zusammenhangloses Sammelsurium von Fakten und Formeln erscheint.

Der Schule zugänglich ist das Fermatsche Prinzip, das in seiner ursprünglichen Formulierung lautet: Von allen möglichen Wegen, die das Licht nehmen könnte, um von einem Punkt zu einem anderen zu gelangen, nimmt es den Weg, der die kürzeste Zeit erfordert. Angewandt auf Reflexion und Brechung des Lichtes an einer gegebenen Grenzfläche gibt dieses Prinzip den „sinnstiftenden Kontext“ für zwei einfache Extremwertaufgaben ab.

Wir beginnen mit der Reflexion (Abb. 8), bei der Licht unter der Bedingung vom Punkt P_1 zum Punkt P_2 gelangen soll, daß es nicht den direkten Weg nimmt, sondern über die Grenzfläche (Spiegel) geht, auf der die x -Achse von Abb. 8 liegt. Das Medium, in dem die Lichtaus-

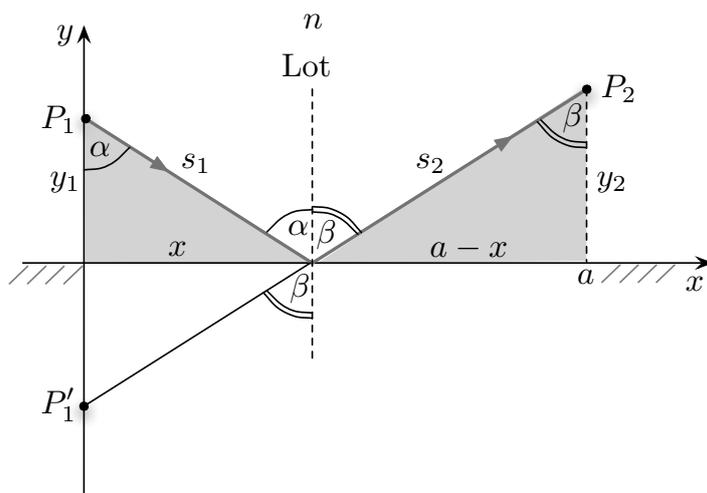


Abbildung 8: Zur Herleitung des Reflexionsgesetzes aus dem Fermatschen Prinzip.

breitung stattfindet, habe den *einen* Brechungsindex n , also die Lichtgeschwindigkeit $\frac{c}{n}$. Die Lichtlaufzeit beträgt dann

$$\tau = \frac{n}{c}(s_1 + s_2) = \frac{n}{c} \left[\sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{(a-x)^2 + y_2^2} \right].$$

Nach dem Fermatschen Prinzip soll sie für den vom Licht genommenen Weg stationär sein, d.h. es soll

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{n}{c} \left(\frac{x}{s_1} - \frac{a-x}{s_2} \right) = 0$$

gelten. Daraus folgt sofort (siehe die schraffierten Dreiecke von Abb. 8)

$$\frac{x}{s_1} = \frac{a-x}{s_2} \quad \text{oder} \quad \sin \alpha = \sin \beta, \tag{9}$$

also das Reflexionsgesetz. Danach hat der Auftreffpunkt des Lichtes auf der Grenzfläche die Koordinate $x = \frac{y_1}{y_1 + y_2} a$.

Im Falle der Brechung haben wir zu berücksichtigen, daß sich das Licht in Medien mit zwei verschiedenen Brechungsindizes n_1 und n_2 ausbreitet. Dann ist mit den Bezeichnungen von Abb. 9

$$\tau = \frac{1}{c}(n_1 s_1 + n_2 s_2) = \frac{1}{c} \left[n_1 \sqrt{x^2 + y_1^2} + n_2 \sqrt{(a-x)^2 + y_2^2} \right].$$

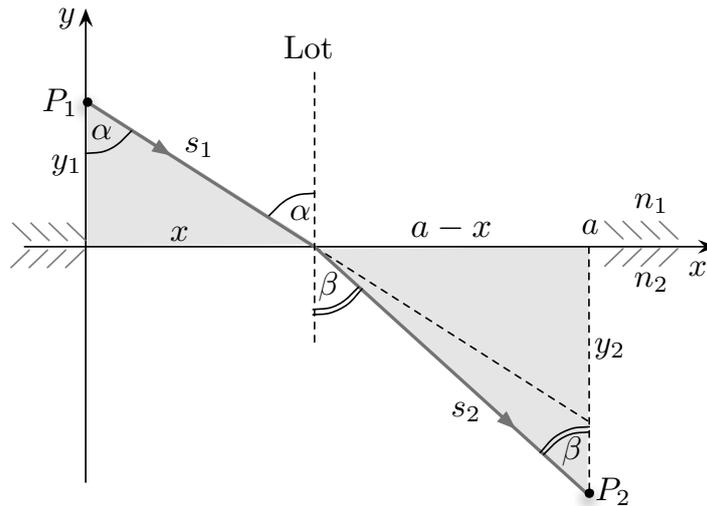


Abbildung 9: Zur Herleitung des Brechungsgesetzes aus dem Fermatschen Prinzip.

Die Forderung der Stationarität führt nun auf

$$n_1 \frac{x}{s_1} = n_2 \frac{a-x}{s_2} \quad \text{oder} \quad n_1 \sin \alpha = n_2 \sin \beta, \quad (10)$$

also das Snelliussche Brechungsgesetz.

Wir erleben, wie Reflexions- und Brechungsgesetz einer gemeinsamen Wurzel entstammen, eben dem Fermatschen Prinzip. Dieses kann auf die gleiche Art noch vieles mehr erklären: wie eine Fata Morgana entsteht, warum die Sonnenscheibe in Horizontnähe deformiert ist, warum eine Sammellinse in der Mitte dick ist usw.

In dem speziellen Fall, daß die beiden Medien diesseits und jenseits der Grenzfläche den gleichen Brechungsindex haben ($n_1 = n_2$), folgt aus (10) die Gleichheit der Winkel α und β . Der Lichtweg ist dann die geradlinige Verbindung der Punkte P_1 und P_2 , welche die Strecke a in dem gleichen Verhältnis teilt wie im Fall der Reflexion. Formal geht (10) in das Reflexionsgesetz (9) über, und wir hätten in Abb. 8 den reflektierten Strahl auch so konstruieren können, daß wir den Punkt P_1 zuerst an der Grenzfläche spiegeln und den so entstehenden Punkt P'_1 geradlinig mit P_2 verbinden. So deckt die Diskussion eines Spezialfalles innere Beziehungen zwischen Reflexions- und Brechungsgesetz auf.

3.5 Aus der Vektorrechnung: das Skalarprodukt

Laut der ausgezeichneten Definition Professor Weyls, eines Mathematikers, ist ein Ding symmetrisch, wenn es eine Möglichkeit gibt, es zu verändern, und es hinterher doch wieder so aussieht wie vorher.

RICHARD P. FEYNMAN

In der Physik spielen Symmetrie- und Invarianzbetrachtungen eine ausgezeichnete Rolle. Daher müssen geometrische Objekte unter dem Gesichtspunkt ihres Verhaltens gegenüber Transformationen betrachtet werden. Mit dem Wissen, das Schüler über die Vektorrechnung erwer-

ben, bedarf es nur noch eines kleinen Schrittes, um in wissenschaftspropädeutischer Absicht ein Beispiel für eine solche Betrachtung zu geben.

Dieses Beispiel ist die Drehung eines kartesischen Koordinatensystems mit seiner z -Achse als Drehachse um einen festen Winkel φ (Abb. 10). Dabei geht seine mit dem Einheitsvek-

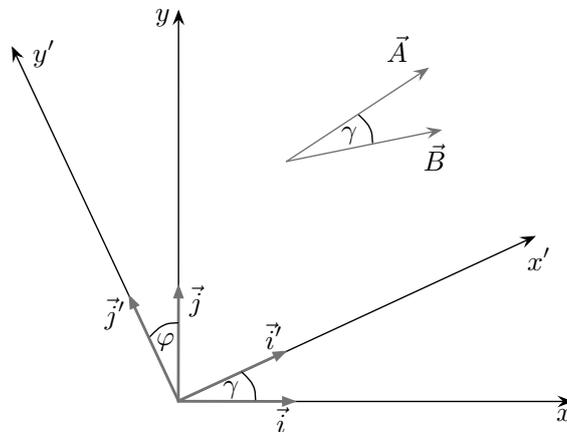


Abbildung 10: Zur Invarianz der Beträge und des Skalarprodukts zweier Vektoren \vec{A} und \vec{B} bei Drehung des Koordinatensystems um den festen Winkel φ .

tor \vec{i} ausgestattete x -Achse in die x' -Achse (Einheitsvektor \vec{i}') über und die y -Achse in die y' -Achse (Einheitsvektoren \vec{j} und \vec{j}'). Um die Beziehungen zwischen dem (x, y) - und dem (x', y') -Koordinatensystem zu finden, drücken wir die Tatsache, daß die Vektoren \vec{i}' und \vec{j}' in der (x, y) -Ebene liegen, durch

$$\vec{i}' = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} \quad \text{und} \quad \vec{j}' = c \cdot \vec{i} + d \cdot \vec{j}$$

aus, worin die Koeffizienten a, \dots, d zunächst unbekannt sind. Wir finden diese, indem wir von der Orthonormalität der Basisvektoren Gebrauch machen. So erhalten wir durch skalare Multiplikation mit \vec{i} wegen $\vec{i} \cdot \vec{i} = 1$ und $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$ den Koeffizienten a zu $a = \vec{i} \cdot \vec{i}'$. Da \vec{i} und \vec{i}' Einheitsvektoren sind, ist ihr Skalarprodukt gleich dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels, also $a = \cos \varphi$. Auf diese Weise resultiert

$$\vec{i}' = \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j} \quad \text{sowie} \quad \vec{j}' = -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}. \quad (11)$$

Ein in der (x, y) -Ebene liegender Vektor \vec{A} läßt sich in Komponenten bezüglich beider Basen zerlegen,

$$\vec{A} = A_1 \vec{i} + A_2 \vec{j} = A'_1 \vec{i}' + A'_2 \vec{j}'.$$

Mit dem eben praktizierten Verfahren (skalare Multiplikation mit \vec{i}' und \vec{j}') gelingt es, nach den Komponenten A'_1 und A'_2 „umzustellen“:

$$A'_1 = A_1 \cos \varphi + A_2 \sin \varphi, \quad A'_2 = -A_1 \sin \varphi + A_2 \cos \varphi.$$

Ein Vergleich mit (11) zeigt, daß sich bei einer Drehung des Koordinatensystems die Komponenten A_1 und A_2 eines Vektors \vec{A} wie die Basisvektoren \vec{i} und \vec{j} transformieren. Diese definierende Eigenschaft von Vektoren ist für die Physik sehr wichtig, weil ausbaufähig.

Hat man sich einmal am Einheitskreis die Gültigkeit des „trigonometrischen Pythagoras“ $\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$ klargemacht, rechnet man leicht nach, daß

$$\sqrt{A'^2_1 + A'^2_2} = \sqrt{A^2_1 + A^2_2}$$

gilt. Obwohl sich also die Vektorkomponenten bei Drehungen des Koordinatensystems ändern, ist der Betrag $|\vec{A}|$ eines Vektors eine *Invariante*, was auch ganz der Anschauung entspricht.

Für zwei Vektoren \vec{A} und \vec{B} zeigt man ebenso leicht, daß

$$A'_1 B'_1 + A'_2 B'_2 = A_1 B_1 + A_2 B_2$$

gilt. Auch das Skalarprodukt $\vec{A} \cdot \vec{B}$ zweier Vektoren ist also eine Invariante, und damit ändert sich, da die Invarianz der Beträge bereits gezeigt wurde, bei Drehungen auch der von den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel γ (Abb. 10) nicht. Auch dies entspricht unserer Anschauung. Während angehenden Studenten das Skalarprodukt $\vec{A} \cdot \vec{B}$ lediglich als stenographisches Symbol für die Summe $A_1 B_1 + A_2 B_2$ in Erinnerung ist, liegt seine eigentliche Bedeutung in der Invarianzeigenschaft gegenüber Drehungen des Koordinatensystems.

Wenn es also keine ausgezeichnete Richtung im Raum gibt, müssen die Naturgesetze so formuliert werden, daß sie invariant gegenüber Drehungen sind, so daß z.B. die Kraft ein Vektor ist, dessen Komponenten von Invarianten abhängen. Im Fall des Newtonschen Gravitationsgesetzes ist dies der Betrag des Abstandes zwischen zwei Himmelskörpern.

Weitere Beispiele für die Bedeutung von Invarianzbetrachtungen für die Physik gibt EHLERS [20].

4 Schlußbemerkung

Wir haben in diesem Aufsatz aus der Sicht der Hochschule auf die Rolle der Mathematik im und für den Physikunterricht der Schule zurückgeblickt. Die Behebung der dabei festgestellten Defizite noch in der Schule ist wünschenswert und möglich. Sie gelingt nicht, wenn Schüler mit Hilfe von Taschenrechner und Tafelwerk auf eine Formeleinsetz- und Formelumstell-Akrobatik trainiert werden, wobei sie weder den Sinn der Aufgabe noch die Bedeutung des Ergebnisses erfassen. Leider ist dieser Zustand in viel zu vielen Klassenzimmern Realität.

Es wäre zu kurz gegriffen, hätten wir lediglich die fehlende Sicherheit und Routine angehenden Studenten im Umgang mit den ihnen in der Schule vermittelten mathematischen Kenntnissen und Techniken bemängelt. Da hilft nur Üben, Üben und nochmals Üben.

Gravierender, weil in seinen Auswirkungen weiterreichend, ist der Stellenwert, den Lehrer und Fachdidaktiker der Mathematik im Physikunterricht beimessen. Wenngleich die Mittel der Schule beschränkt sind, sind sie doch ausreichend, damit keinem Schüler, der eine Bildung durch Mathematik und Naturwissenschaften erhält, das Erlebnis vorenthalten werden muß, das C.F. FRH. V. WEIZSÄCKER in die schönen Worte kleidete [21]: „*Vergleichen Sie die unbewußten Leistungen der Lebewesen mit denen der unbelebten Natur! Die Pflanze wächst, der Vogel fliegt, die Biene baut ihre Waben, ohne es bewußt gelernt zu haben; sie können es, ohne zu wissen, was sie tun. Verfolgen Sie aber mit ausgeruhtem Auge die Flugbahn der Planeten am Himmel, so werden Sie dasselbe Wunder erleben. Auch diese Dinge der unbelebten Natur können das Ihre, ohne es zu wissen. Wir wissen, daß ihre Bewegung Differentialgleichungen genügt, die wir nur in wenigen Fällen integrieren können. Sie aber integrieren diese Gleichungen, von denen sie nichts wissen, ohne Zögern und fehlerlos durch ihr bloßes Sein. Die Natur ist nicht subjektiv geistig; sie denkt nicht mathematisch. Aber sie ist objektiv geistig; sie kann mathematisch gedacht werden. Dies ist vielleicht das Tiefste, was wir über sie wissen.*“

Literatur

- [1] AUT.-KOLL.: *Auszug aus den Reformvorschlägen der Unterrichtskommission der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte – Meraner Bericht vom Jahre 1905*
in: F. DANNEMANN, *Der naturwissenschaftliche Unterricht auf praktisch-heuristischer Grundlage*, Hahnsche Buchhandlung, Hannover, Leipzig 1907, S. 337ff
- [2] GRIMSEHL, E.: *Didaktik und Methodik der Physik*
C.H. Beck'sche Verlagsbuchhandlung, München 1911
- [3] KOMNICK, M.: *Der Unterricht am Gymnasium Ernestinum im 19. Jahrhundert*
in: Gymnasium Ernestinum Gotha (Hrsg.), *Festschrift zum 475-jährigen Schuljubiläum des Gymnasium Ernestinum Gotha, 1524-1999*; Gotha, März 1999, S. 132
- [4] EINSTEIN, A.: *Über spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*
Wissenschaftl. Taschenbücher Mathematik, Physik, Bd. 59; Akademie-Verlag, Berlin 1969
- [5] LOTZE, K.-H.: *Die allgegenwärtige Gravitation – Anregungen für einen zeitgemäßen Unterricht*, Praxis der Naturwissenschaften 49(2000)(5)4-8
- [6] TAYLOR, E.F., WHEELER, J.A.: *Physik der Raumzeit – Eine Einführung in die spezielle Relativitätstheorie*, Spektrum Akad. Verl. Heidelberg, Berlin, Oxford 1994, S. 36
- [7] HUND, F.: *Die wissenschaftliche Erziehung in den Naturwissenschaften – Mathematik und Physik*, in: H. NOHL u. L. PALLAT (Hrsg.), *Handbuch der Pädagogik*, Verlag Julius Beltz, Langensalza
- [8] GROSSMANN, S.: *Mathematischer Einführungskurs für die Physik*
Verlag B.G. Teubner Stuttgart, Leipzig 2000
- [9] HEFFT, K.: *Mathematischer Vorkurs zum Studium der Physik*
Elsevier Spektrum Akad. Verl. München 2006
- [10] KALLENRODE, M.-B.: *Rechenmethoden der Physik – Mathematischer Begleiter zur Experimentalphysik*, Springer-Verl. Berlin, Heidelberg 2003
- [11] KORSCH, H.: *Mathematische Ergänzungen zur Einführung in die Physik*
Binomi-Verlag Springe 1999
- [12] RIECH, V.: *Mathematik zu den Experimentalphysik-Vorlesungen – ein Leitfaden für Studienanfänger*, Spektrum Akad. Verl. Heidelberg 1997
- [13] SCHÄFER, W., GEORGI, K., TRIPPLER, G.: *Vorkurs Mathematik*
Verlag B.G. Teubner Stuttgart, Leipzig 1993
- [14] SCHULZ, H.: *Physik mit Bleistift – Das analytische Handwerkszeug der Naturwissenschaftler*, Verlag Harri Deutsch Frankfurt/M. 2004
- [15] WAGENSCHNIG, M.: *Die pädagogische Dimension der Physik*, Anhang E
Hahner Verlagsgesellsch., Aachen 1995
- [16] LOTZE, K.-H.: *Eine gläserne „Gravitations“-Linse*
ASTRONOMIE + Raumfahrt im Unterricht 41(2004)(5)10-13

- [17] GAITHER, C.C.; CAVAZOS-GAITHER, A.E.: *Mathematically Speaking – A Dictionary of Quotations*, Institute of Physics Publishing, Bristol, Philadelphia 1998
- [18] FEYNMAN, R.P., LEIGHTON, R.B., SANDS, M.: *Feynman Vorlesungen über Physik*
R. Oldenbourg Verlag München, Wien 1987; Bd. II, Kap. 12-1
- [19] LOTZE, K.-H., ZIPS, R.: *Spezielle Relativitätstheorie in Aufgaben – wider den Vorwurf einer „zerrechneten Physik“*, Physik in der Schule 33(1995)(6)215-221
- [20] EHLERS, J.: *Mathematik als „Sprache“ der Physik*
Praxis der Naturwissenschaften/Physik in der Schule 55(2006)(5)2-7
- [21] WEIZSÄCKER, C.F. FRH.V.: *Die Geschichte der Natur*
Kleine Vandenhoeck-Reihe, Bd. 1/1a; Vandenhoeck& Ruprecht, Göttingen 1979