

Skript zum Online-Mathematik-Vorkurs für Studienanfänger

KARL-HEINZ LOTZE

Stand: 20. März 2024

unter Mitwirkung von:

Thomas Kaiser (Gesamtkonzeption und \LaTeX -Produktion)

Silvio Fuchs, Simon Stützer (Videokonzeption)

Leon Buchholz, Leo Dörfler, Niklas Kammel (Dreh und Videoproduktion)

Nils Geib geb. Becker, Sebastian Ulbricht (ursprüngliches \LaTeX -Skript)

Laura Engemaier (Abbildungen)

Inhaltsverzeichnis

1. Die Exponentialfunktion	9
1.1. Definition und Eigenschaften	9
1.2. Wachstum und Zerfall	12
1.3. *Hyperbelfunktionen	14
2. Komplexe Zahlen	17
2.1. Definition und Rechenregeln	17
2.2. Die Gaußsche Zahlenebene, Polarkoordinaten	19
2.3. Die Formeln von Euler und Moivre	21
2.4. Radizieren komplexer Zahlen, Kreisteilung	24
2.5. Funktionen von komplexen Argumenten	26
2.6. *Beweis der Moivreschen Formel durch vollständige Induktion	27
3. Vektoralgebra: Skalarprodukt und Vektorprodukt	29
3.1. Wiederholung: Vektoren	29
3.2. Skalarprodukt	31
3.3. Vektorprodukt	34
3.4. Geometrische Anwendungen mit physikalischer Bedeutung	37
3.5. Mehrfachprodukte von Vektoren	41
3.6. Vektoren und Drehungen des Koordinatensystems	42
3.7. *Additionstheoreme von Winkelfunktionen	45
4. Kegelschnitte	49
4.1. Wiederholung: Der Kreis	49
4.2. Die Ellipse	50
4.3. Die Hyperbel	54
4.4. Die Parabel	57
5. Differentialrechnung mit einer Variablen	61
5.1. Die Ableitung: Bezeichnungen, Definition und geometrische Bedeutung	61
5.2. Wichtige Grenzwerte und Ableitungen	67
5.3. Differentiationsregeln und weitere Ableitungen	69
5.4. Implizites Differenzieren	72
5.5. Zusammenfassung Ableitungsregeln, Ableitungen elementarer Grundfunktionen	76
5.6. *Zyklometrische Funktionen	77
5.7. *Nochmals zur Ableitung der Kreisfunktionen	78
6. Differentialrechnung mit zwei und drei Variablen	81
6.1. Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen. Die partielle Ableitung	81
6.2. Tangentialebene und Normalenvektor einer Fläche	85
6.3. Richtungsableitung und Gradient	86
6.4. Beispiele	90

6.5. Der Gradient in drei Dimensionen	93
7. Rechnen mit kleinen Größen	95
7.1. Vorbereitende Beispiele	95
7.2. Taylor-Reihen und Taylor-Polynome	97
7.3. Die Kleinwinkel-Näherung und nochmals zur Eulerschen Formel	98
7.4. Lineare Approximation und Fehlerfortpflanzung	102
8. Integralrechnung	105
8.1. Integration als Umkehrung der Differentiation. Das unbestimmte Integral	105
8.2. Das bestimmte Integral	107
8.3. Eigenschaften bestimmter Integrale	110
8.4. Integrationstechniken I: Die Substitutionsmethode	112
8.5. Integrationstechniken II: Partielle Integration	115
8.6. Formelsammlung zur Integralrechnung	117
8.7. *Summen und Integrale – Das Cavalierische Prinzip	118
8.8. *Integrationsmethoden III – Partialbruchzerlegung	122
A. Anhang	127
A.1. Winkelmaße	127

Vorwort aus dem Jahr 2016

Nachdem an vielen Universitäten Mathematik-Vorkurse für Studienanfänger der Physik bereits existierten, wurde auch an der Physikalisch-Astronomischen Fakultät der Friedrich-Schiller-Universität Jena ein solcher Kurs mit dem Wintersemester 1997/98 eingerichtet. Mit ihm wurden anfänglich zwei Ziele verfolgt: der Ausgleich der unterschiedlichen Voraussetzungen, mit denen Abiturienten zum Studium kommen und die Handhabung mathematischer Techniken, wie sie vom ersten Tag des Physikstudiums an unerlässlich sind.

Binnen weniger Jahre wurde der Vorkurs auf Wunsch der Studenten als Vorlesung "Mathematische Methoden der Physik" weitergeführt. Wenig später kamen zu dieser einsemestrigen Vorlesung auch Übungen hinzu. Mittlerweile ist die Veranstaltung ein prüfungsrelevantes Pflichtmodul. Ihr Inhalt, die gewöhnlichen Differentialgleichungen und die Vektoranalysis, wird maßgeblich dadurch bestimmt, dass die Theoretische Physik nun bereits im zweiten Semester beginnt.

Ebenfalls auf Wunsch der Studenten werden, nicht verpflichtend, die "Mathematischen Methoden" mit wechselnden Inhalten um ein oder zwei weitere Semester verlängert.

Anstelle eines ausführlichen Vorwortes verweise ich auf meinen Aufsatz

Wie gut bereitet der Mathematikunterricht auf ein Studium der Physik vor?,
Praxis der Naturwissenschaften/Physik 55(2006)(5)8 – 17,

worin die Konzeption dieser Kurse ausführlich erläutert wurde. Der Aufsatz ist diesem Skript angefügt. Von den dort gegebenen Begründungen und Motivationen wiederhole ich hier nur eine: Die "Mathematischen Methoden der Physik", die man auch als "Rechenmethoden der Physik" bezeichnen könnte, sollen und können Lehrveranstaltungen, die professionelle Mathematiker für Physikstudenten halten, *nicht* ersetzen. Sie können sie bestenfalls ergänzen. Und so sehe ich sie als Fortsetzung einer Tradition der Zusammenarbeit von Mathematikern und Physikern in der Ausbildung von Physikstudenten, die ich als Student erlebte und an der ich in den 1980er Jahren als Assistent teilnahm.

Besagter Aufsatz enthält auch eine Liste der mit ähnlichen Zielen verfassten deutschsprachigen Literatur, die um das schöne Buch meines Wiener Kollegen F. Embacher zu ergänzen ist, das erst nach der Veröffentlichung des Aufsatzes erschien:

EMBACHER, F: *Mathematische Grundlagen für das Lehramtsstudium Physik*,
Vieweg+Teubner, Wiesbaden 2008.

Trotz der Verfügbarkeit zahlreicher einschlägiger Lehrbücher wurde der Wunsch der Studenten nach einem Skript zum Vorkurs und den "Mathematischen Methoden" laut. Ich habe diesem Wunsch nur zögernd nachgegeben, weil ein Skript die Gefahr birgt, dass man "was man schwarz auf weiß besitzt, getrost nach Hause tragen" kann und die Vorlesung nicht besuchen

muss. Diese findet aber im Hörsaal statt, und das dort gesprochene, erklärende und erläuternde Wort sowie die auf Fragen der Studenten gegebenen Antworten sind durch kein Skript zu ersetzen.

Zwischendurch haben Studenten selbst Zusammenfassungen von diesen Lehrveranstaltungen verfasst und ihren jüngeren Kommilitonen weitergereicht. Diese Art der Auseinandersetzung mit dem Stoff ist grundsätzlich zu begrüßen.

Die vorliegende, von den Herren SIMON STÜTZER, NILS BECKER und in jüngster Zeit vor allem SEBASTIAN ULBRICHT besorgte Ausarbeitung ist die einzige, die ich durchgesehen habe und hiermit autorisiere. Ich danke diesen jungen Kollegen für ihren großen Fleiß, ihre Sorgfalt und die Hartnäckigkeit, mit der sie auf die Veröffentlichung des Skripts drängten, und hoffe, dass die Nutzer sinnvollen Gebrauch davon machen. Mein Dank gilt auch Frau DR. AGNES SAMBALE, die das Skript in ihren Lehrveranstaltungen verwendet und auf wohl unvermeidbare Druckfehler aufmerksam gemacht hat.

Studenten höherer Semester haben die Übungen zu den genannten Veranstaltungen abgehalten. Ich habe diese Tätigkeit bereits bei verschiedenen Gelegenheiten als ein besonders schönes Beispiel dafür hervorgehoben, wie Studenten unterschiedlicher Semester miteinander und voneinander lernen.

Die in der Vorlesung und nun auch im Skript dargebotenen Inhalte sind klassischer Stoff, der in ungezählten Lehrbüchern dargestellt wurde. Gleichwohl muss ihm ein jeder, der ihn vorträgt, seine eigene didaktische Note aufprägen, anfangen von der Konzeption über die Auswahl von Beispielen bis hin zu einer konsequent einheitlichen Symbolik. Klassiker unter diesen Lehrbüchern sind:

BECKER, R. : *Vorstufe zur theoretischen Physik*
Springer-Verlag, N.Y., Berlin, Göttingen, Heidelberg 1950

JOOS, G., RICHTER E.W. : *Höhere Mathematik für den Praktiker*
J.-A.-Barth-Verlag, Leipzig, 1968 (11. Auflage)

Ich habe immer wieder, besonders auch bei der Auswahl von Übungsaufgaben, auf die in der nachfolgenden Liste aufgeführten Lehrwerke zurückgegriffen ohne dass dies an einzelnen Stellen des Skripts kenntlich gemacht wurde.

BOAS, M.L. : *Mathematical Methods in the Physical Sciences*
John Wiley & Sons, Inc., 2006

HASSANI, S. : *Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields*
Springer-Verlag, N.Y., 2000

KUSSE, B.R., WESTWIG, E.A. : *Mathematical Physics*
Wiley-VCH-Verlag, Weinheim, 2006

LOVRIC, M. : *Vector Calculus*
John Wiley & Sons, Inc., 2007

- MARSDEN, J., WEINSTEIN, A. : *Calculus (3 Vols.)*
Springer-Verlag, N.Y., Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1985
- MARTIN, B.R., SHAW, G. : *Mathematics for Physicists*
John Wiley & Sons, Inc., 2015
- PROSPERETTI, A : *Advanced Mathematics for Applications*
Cambridge University Press, Cambridge, 2011
- RILEY, K. F., HOBSON, M.P, BENICE, S.J. : *Mathematical Methods for Physics and Engineering*
Cambridge University Press, Cambridge, 2006
- SIMMONS, G.F. : *Calculus with Analytic Geometry*
McGraw-Hill Companies, Inc., 1996
- WHELAN, C.T. : *A First Course in Mathematical Physics*
Wiley-VCH-Verlag, Weinheim, 2016
- WILLERS, F.A. : *Elementarmathematik – Ein Vorkurs zur Höheren Mathematik (12. Aufl.)*
Verl. Theodor Steinkopff Dresden, Leipzig, 1965

Keines dieser Werke liegt meiner Lehrveranstaltung ganz zugrunde, alle zusammen sind sie jedoch eine reiche Quelle der Inspiration und bestimmend für das Anspruchsniveau der "Mathematischen Methoden der Physik".

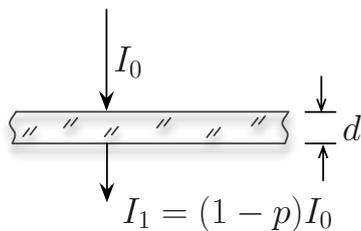
Karl-Heinz Lotze
Jena im August 2016

1. Die Exponentialfunktion

In diesem Kapitel behandeln wir die Exponentialfunktion. Diese spielt in der Physik und in anderen Naturwissenschaften eine große Rolle. So liegt sie beispielsweise den Berechnungen von Wachstum und Zerfall sowohl bei der Radioaktivität als auch in der Populationsdynamik zugrunde.

1.1. Definition und Eigenschaften

Physikalisches Einführungsbeispiel Als erstes Beispiel beschreiben wir den Durchgang von Licht durch eine (dicke) Glasplatte. Dazu betrachten wir zunächst eine *dünne* Glasplatte und müssen definieren, was wir mit „dünn“ überhaupt meinen.



Sei I_0 die Intensität des auftreffenden Lichtes. Wir bezeichnen das Produkt $p \cdot I_0$ als *absorbierten Anteil*. Darin ist $0 \leq p \leq 1$, und der Buchstabe p soll den prozentualen Anteil zum Ausdruck bringen. Die Erfahrung lehrt uns, daß – in Abhängigkeit von der Glassorte – für bestimmte, nicht zu große Dicken d

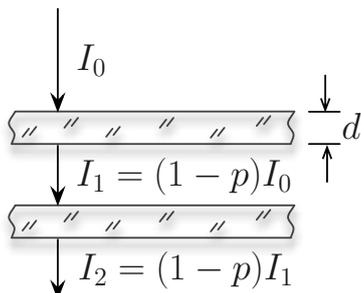
$$p = \alpha \cdot d$$

gilt.

Darin ist α eine Materialkonstante mit der Dimension einer reziproken Länge. Solange diese Proportionalität zwischen dem Anteil absorbierten Lichtes und der Plattendicke besteht, wollen wir sagen, daß eine Platte *dünn* sei.

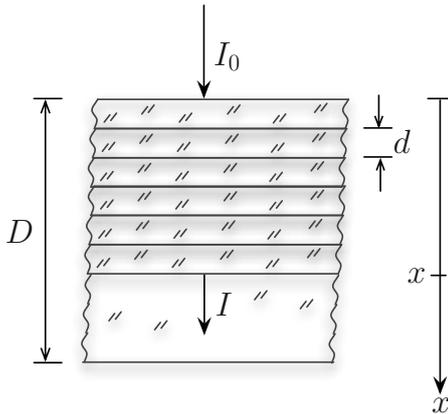
Der *durchgelassene* Anteil des Lichtes errechnet sich somit zu

$$I_1 = (1 - p) \cdot I_0.$$



Für zwei dünne Glasplatten ist die durchgelassene Intensität

$$I_2 = (1 - p)^2 \cdot I_0.$$



Wir wollen dies nun verallgemeinern. Dazu zerlegen wir – wenigstens in Gedanken – eine dicke Platte in dünne Schichten gleicher Dicke d . Bis zur Stelle x hat das Licht $\frac{x}{d}$ Schichten durchlaufen. Der durchgelassene Anteil ist dann

$$I(x) = (1 - p)^{x/d} \cdot I_0 = (1 - p)^{\alpha x/p} \cdot I_0,$$

was man durch vollständige Induktion zeigen kann (Übungsaufgabe).

Da die Intensität „zerfällt“, schreiben wir dafür

$$I(x) = \left[(1 - p)^{-1/p} \right]^{-\alpha x} \cdot I_0.$$

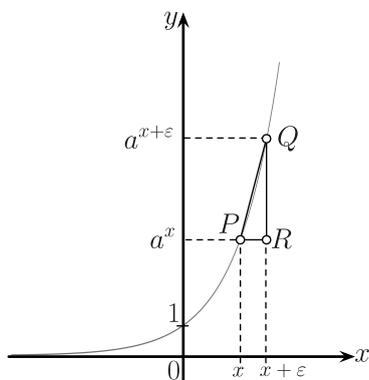
Im Grenzfall „unendlich dünner“ Schichten ist mit $d \rightarrow 0$ auch $p \rightarrow 0$, und wir erhalten

$$I(x) = \left[\lim_{p \rightarrow 0} (1 - p)^{-1/p} \right]^{-\alpha x} \cdot I_0.$$

Wir bestimmen den Grenzwert $\lim_{p \rightarrow 0} (1 - p)^{-1/p}$ mit Hilfe einer Taschenrechner-Kalkulation:

p	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1 - p)^{-1/p}$	2,86797	2,73199	2,71964	2,71841	2,71829

Mathematisches Einführungsbeispiel Wir betrachten die allgemeine Exponentialfunktion $y = f(x) = a^x$ mit $a > 1$.



\overline{PQ} : Sekante,
Hypothenuse im rechtwinkligen $\triangle PRQ$

Zu Beginn stellen wir die Frage, ob es eine spezielle Basis a_0 gibt, sodaß die Wachstumsrate von $y = a_0^x$ für beliebige x gleich a_0^x ist. Die Wachstumsrate gibt an, wie groß der Zuwachs von y beim Fortschreiten von x nach $x + \varepsilon$, bezogen auf die Schrittweite ε , ist. Sie ist also das Verhältnis $\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}$. Wir lesen ab ^a

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{a_0^{x+\varepsilon} - a_0^x}{(x + \varepsilon) - x} = \frac{a_0^x \cdot a_0^\varepsilon - a_0^x}{\varepsilon} \stackrel{!}{\approx} a_0^x$$

$$\frac{a_0^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \approx 1$$

$$a_0^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$$

$$a_0 \approx (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}.$$

^aDas Ausrufezeichen (!) werden wir immer dann benutzen, wenn wir eine Forderung zum Ausdruck bringen wollen.

Für die Wachstumsrate *in einem Punkt P* ist die Näherung umso besser, je kleiner ε ist. Es ist also

$$a_0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}.$$

Mit dieser Basis a_0 ist die Wachstumsrate von a_0^x in jedem Punkt x gleich dem Funktionswert a_0^x . Wieder berechnen wir den Grenzwert mit einer Taschenrechner-Kalkulation:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon}$	2,59374	2,70481	2,71692	2,71814	2,71826

Resultat In beiden Beispielen sind wir auf den Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 - \varepsilon)^{-1/\varepsilon}$$

gestoßen. Wir erkennen anhand der Tabellen, daß beim Fortschreiten zu immer kleineren Werten von ε immer mehr Ziffern nach dem Komma stabil bleiben – zuerst 7, dann 1, dann 8 usw. Wir nennen diesen Grenzwert die *Eulersche Zahl e*,

$$e \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (1 + \varepsilon)^{1/\varepsilon} = 2,7182818\dots$$

Anmerkung Mit den Ersetzungen $\varepsilon = \frac{1}{n}$ bzw. $\varepsilon = -\frac{1}{n}$, n ganz, ist auch

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{-n} = e.$$

Damit können wir die Resultate der Beispiele wie folgt aufschreiben:

- Beim Durchgang des Lichtes durch eine dicke Glasplatte ist die Intensität I_0 in der Tiefe x auf

$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$$

zurückgegangen. Nach dem Durchgang durch die ganze Platte mit der Dicke D beträgt sie nur noch $I = I_0 e^{-\alpha D}$.

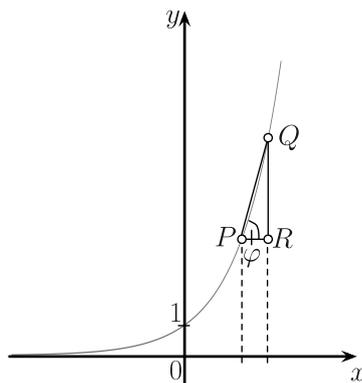
- Die Exponentialfunktion $y = a^x$ mit der Basis $a_0 = e$, ($y = e^x$), hat die Eigenschaft, daß ihre Wachstumsrate in jedem Punkt x wieder e^x ist.

Anmerkung Die in diesem Kapitel bevorzugt diskutierte Funktion $y = e^x$, die in Physikerkreisen oft als „Exponentialfunktion schlechthin“ angesehen wird, stellt keinen Ausschluß von Funktionen $y = a^x$ mit anderen Basen als $a_0 = e$ dar, denn wir können

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$$

schreiben.

Anmerkung Der Begriff „Wachstumsrate“ hat eine geometrische Entsprechung, nämlich:



$$\tan \varphi = \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}}$$

Als „Wachstumsrate“ in einem Punkt bezeichnen wir den durch die Ableitung der Funktion in diesem Punkt gegebenen *Anstieg der Tangente* an den Funktionsgraphen.

Fazit: Durch die Fragestellung des mathematischen Einführungsbeispiels haben wir gerade die Funktion unter den Exponentialfunktionen konstruiert, deren Funktionswert in jedem Punkt gleich ihrer eigenen Ableitung ist. Für $y = e^x$ ist also $y' = e^x$ oder

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x.$$

In dieser Eigenschaft liegt die Bedeutung von e als Basis einer Exponentialfunktion.

1.2. Wachstum und Zerfall

Wir betrachten nun die Funktion

$$y = A \cdot e^{c \cdot x}$$

mit $A = \text{const}$ und

$$c = \text{const} \begin{cases} > 0 & \text{exponentielles Wachstum} \\ < 0 & \text{exponentieller Zerfall.} \end{cases}$$

Die Ableitung ergibt sich mit Hilfe der Kettenregel zu

$$y' = A \cdot c \cdot e^{c \cdot x} = c \cdot y.$$

Dies ist eine *Differentialgleichung*, da außer der Funktion y auch deren Ableitung y' vorkommt. Bei der Lösung der Gleichung müssen wir uns also die Frage stellen: Welche Funktion $y = f(x)$ reproduziert sich bei einmaliger Ableitung bis auf eine Konstante? Es ist die Exponentialfunktion, die wir ja gerade so konstruiert haben, daß sie diese Eigenschaft hat.

Anders ausgedrückt: Immer dann, wenn die Wachstums(Zerfalls-)rate einer Größe *proportional* zu dieser Größe selbst ist, ist das Wachstum (der Zerfall) *exponentiell*. Dieser Zusammenhang kommt in der Natur häufig vor, so z.B. bei unserem Einführungsbeispiel. Es war $I' = -\alpha I$. Somit kann nach Durchlauf einer bestimmten Anzahl von Schichten die nächste Schicht nur noch den Teil der Intensität absorbieren, der noch vorhanden ist.

Ein Charakteristikum des exponentiellen Wachstums (Zerfalls) ist die sogenannte *Verdopplungs-* bzw. *Halbwertszeit*. Wir nutzen nun also t als neue Variable an Stelle von x . Das Ergebnis läßt sich aber direkt auf eine Halbwertstiefe, etwa im Fall der dicken Glasplatte, übertragen. Es ist dies dann die Tiefe, in der die Anfangsintensität auf die Hälfte gesunken ist.

Wachstum: $y = Ae^{ct}$, $c > 0$
Verdopplungszeit $T_{(2)}$:

$$\begin{aligned} y(t_0 + T_{(2)}) &\stackrel{!}{=} 2y(t_0) \\ Ae^{c(t_0 + T_{(2)})} &= 2Ae^{ct_0} \\ e^{cT_{(2)}} &= 2 \\ cT_{(2)} &= \ln 2 \\ T_{(2)} &= \frac{1}{c} \ln 2 \end{aligned}$$

Zerfall: $y = Ae^{-ct}$, $c > 0$
Halbwertszeit $T_{(1/2)}$:

$$\begin{aligned} y(t_0 + T_{(1/2)}) &\stackrel{!}{=} \frac{1}{2}y(t_0) \\ Ae^{-c(t_0 + T_{(1/2)})} &= \frac{1}{2}Ae^{-ct_0} \\ e^{-cT_{(1/2)}} &= \frac{1}{2} \\ -cT_{(1/2)} &= \ln \frac{1}{2} = -\ln 2 \\ T_{(1/2)} &= \frac{1}{c} \ln 2 \end{aligned}$$

Obwohl beide Ergebnisse gleich aussehen, ist zu beachten, daß es sich einmal um Wachstum und einmal um Zerfall handelt, was durch das Vorzeichen im Exponenten der e -Funktion zum Ausdruck kommt. Mit der Variablen t (Zeit) hat die Konstante c die Dimension einer reziproken Zeit, mit der Variablen x (Länge) die einer reziproken Länge. In jedem Fall muß der Exponent der Exponentialfunktion die Dimension 1 haben oder, wie man auch sagt, dimensionslos sein.

Wir wollen nun die Differentialgleichung $y' = cy$ für weitere Anwendungen auf die Form

$$y' = cy + d, \quad d = \text{const}$$

verallgemeinern. Ist beispielsweise $c < 0$ und $d = \text{const} > 0$, beschreibt diese Differentialgleichung einen Zerfall mit konstanter Zufuhr. Die Konstruktion der Lösung gelingt uns, indem wir die Differentialgleichung auf die Form $y' = cy$ zurückführen.

- 1. Schritt:

$$y' = c \left(y + \frac{d}{c} \right)$$

- 2. Schritt: Wir fügen nun auf der linken Seite eine geeignete Konstante hinzu. Dies ist erlaubt, da die Ableitung einer Konstanten ohnehin Null ist. Diese Konstante ist hier natürlich $\frac{d}{c}$,

$$\left(y + \frac{d}{c} \right)' = c \left(y + \frac{d}{c} \right).$$

- 3. Schritt: Setzen wir $y + \frac{d}{c} \equiv z$, erhalten wir die Gleichung

$$z' = cz$$

mit der bekannten Lösung

$$z = Ae^{cx} = y + \frac{d}{c}.$$

- Resultat:

$$y = Ae^{cx} - \frac{d}{c}$$

- Probe: Einsetzen der Lösung in die ursprüngliche Differentialgleichung ergibt mit $y' = Ace^{cx}$ 1

$$\left. \begin{array}{l} \text{L.H.S.:} \quad Ace^{cx} \\ \text{R.H.S.:} \quad c \left(Ae^{cx} - \frac{d}{c} \right) + d = Ace^{cx} \end{array} \right\} \text{Übereinstimmung.}$$

1.3. Zusätzlicher Inhalt: Hyperbelfunktionen

In diesem Abschnitt betrachten wir Hyperbelfunktionen. Diese sind nützliche Kombinationen aus Exponentialfunktionen mit Eigenschaften, die denen der trigonometrischen oder Kreis-Funktionen verwandt sind. Die Namen dieser Funktionen werden in den Kapiteln über komplexe Zahlen und Kegelschnitte verständlich werden.

Definitionen

$$\sinh x = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \quad \text{sinus hyperbolicus}$$

$$\cosh x = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \quad \text{cosinus hyperbolicus}$$

Eigenschaften Aus den Definitionen können sofort einige Eigenschaften dieser Funktionen abgelesen werden:

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad \text{gerade Funktion}$$

$$\cosh(0) = 1;$$

$$\sinh(-x) = -\sinh x, \quad \text{ungerade Funktion}$$

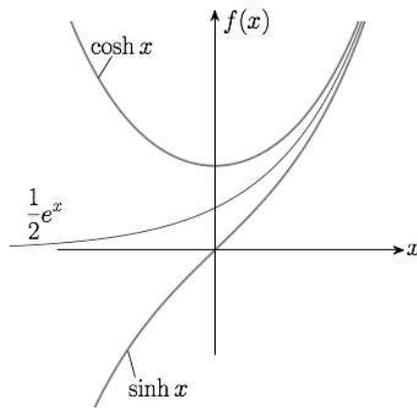
$$\sinh(0) = 0$$

und

$$\cosh x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^x, \quad \sinh x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} e^x.$$

Diese Eigenschaften wollen wir nun nutzen, um die Funktionsgraphen zu konstruieren.

¹Wir benutzen künftig die Abkürzung L.H.S (left-hand side) und R.H.S. (right-hand side) für die linke bzw. rechte Seite einer Gleichung.



Die cosh-Funktion hat eine besonders anschauliche physikalische Bedeutung. Sie beantwortet die Frage: Welche Gestalt hat ein homogenes Seil gegebener Länge, dessen Schwerpunkt möglichst tief liegt?

Weitere Hyperbelfunktionen sind in Analogie zu den trigonometrischen Funktionen definiert,

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x}.$$

Dem „trigonometrischen Pythagoras“ am Einheitskreis, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, entspricht die Relation

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = \frac{1}{4} (e^{2x} + 2 + e^{-2x}) - \frac{1}{4} (e^{2x} - 2 + e^{-2x}) = 1.$$

(Beachte den Vorzeichenunterschied!)

2. Komplexe Zahlen

In diesem Kapitel werden wir die für die Physik so wichtigen komplexen Zahlen kennenlernen. Sie finden ihre Anwendung z.B. bei Schwingungsvorgängen, bei der Bewegung auf einem Kreis, in der Elektrotechnik und vor allem in der Quantentheorie.

2.1. Definition und Rechenregeln

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

mit der Variablen z und bringen diese mit Hilfe der binomischen Formel in die Gestalt

$$(z - 1)^2 = -1.$$

Es wird also eine Zahl gesucht, deren Quadrat negativ ist. Unter den uns bisher bekannten reellen Zahlen gibt es eine solche Zahl nicht. Rein formal können wir die Lösung in der Form

$$z_1 = 1 + \sqrt{-1}, \quad z_2 = 1 - \sqrt{-1}$$

aufschreiben, wobei im Rahmen der reellen Zahlen nicht erklärt ist, was $\sqrt{-1}$ bedeutet.

Definieren wir nun durch $i^2 = -1$ eine *imaginäre Einheit* i , nimmt unsere formale Lösung die Gestalt

$$z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 1 - i$$

an. Durch diese Definition haben wir den Bereich der reellen Zahlen verlassen und ein Vielfaches der reellen Einheit 1 mit einem Vielfachen der imaginären Einheit i zu einer *komplexen Zahl* zusammengesetzt:

$$z_1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot i, \quad z_2 = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot i.$$

Komplexe Zahlen können also als Paare zweier reeller Zahlen, in unserem Fall $(1, 1)$ und $(1, -1)$ aufgefaßt werden. Losgelöst von unserem Beispiel schreiben wir allgemein

$$z = x + iy$$

und nennt dies die *Standard-Darstellung* der komplexen Zahlen. Darin heißt

$$x = \operatorname{Re} z \quad \text{Realteil von } z,$$

und $y = \operatorname{Im} z \quad \text{Imaginärteil von } z.$

Der Imaginärteil ist also auch eine reelle Zahl. Ist $x = 0$, heißt z (rein) imaginär; mit $y = 0$ ist z eine reelle Zahl.

Beispiele Die nachfolgenden Ausdrücke sollen in die Standard-Darstellung gebracht werden.

- a) $i^3 = i \cdot i^2 = -i$; $\operatorname{Re}(i^3) = 0$, $\operatorname{Im}(i^3) = -1$
 b) $\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$; $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{i}\right) = 0$, $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{i}\right) = -1$
 c) allgemein gilt für $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i.$$

Die Lösungen z_1 und z_2 aus dem Einführungsbeispiel haben eine weitere Eigenschaft: Es entsteht z_2 aus z_1 , indem wir i durch $-i$ ersetzen (und umgekehrt). Allgemein heißen komplexe Zahlen $z = x + iy$ und $\bar{z} = x - iy$ zueinander *konjugiert komplex*.¹ Damit erhalten wir die nützlichen Formeln

$$\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}).$$

Rechenregeln für $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$. Unser Ziel ist es, für Summe und Differenz sowie Produkt und Quotient zweier komplexer Zahlen die Standard-Darstellung zu finden. Dabei lassen wir alle Rechenregeln für reelle Zahlen gelten, insbesondere auch das Distributivgesetz, setzen aber i^2 gleich -1 , wo immer es vorkommt.

- a) *Gleichheit* zweier komplexer Zahlen: $z_1 = z_2$, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$.

Es ist nicht möglich zu entscheiden, welche komplexe Zahl die größere oder die kleinere Zahl ist.

- b) *Addition*: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

- c) *Subtraktion*: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

Es gilt also die Regel:

Wir addieren (subtrahieren) zwei komplexe Zahlen, indem wir jeweils die Real- und Imaginärteile für sich addieren (subtrahieren).

Das Rechnen mit komplexen Zahlen erinnert hier an die Vektorrechnung in der Ebene, wenn man als „Basis“ 1 und i verwendet und beachtet, daß $i^2 = -1$ ist.

- d) *Multiplikation*:

$$z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

Insbesondere ist $z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 \geq 0$ reell, aber $z^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy$ komplex.

¹In der Literatur wird die zu z konjugiert komplexe Zahl oft auch mit z^* bezeichnet.

e) *Division*:

- 1. Schritt: Zunächst berechnen wir den *Kehrwert*

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

(Idee: Erweitern mit der konjugiert-komplexen Zahl und dadurch „Reellmachen des Nenners“.)

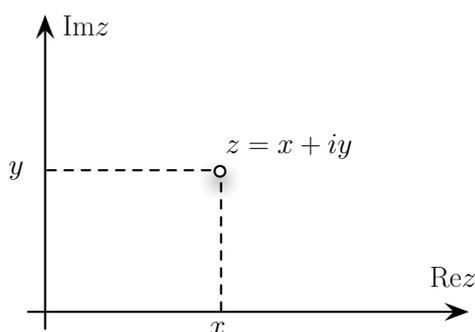
$$\text{Damit ist } \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2 + y^2} \text{ und } \operatorname{Im} \frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

- 2. Schritt: Mit der gleichen Idee erhalten wir

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

2.2. Die Gaußsche Zahlenebene, Polarkoordinaten

Ziel dieses Abschnitts ist es, eine weitere Darstellung für komplexe Zahlen zu finden. Zu diesem Zweck beginnen wir zunächst mit einer *graphischen* Darstellung. Da komplexe Zahlen aus zwei reellen Zahlen zusammengesetzt sind, liegt es nahe, diese als Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem aufzufassen. Die von diesem Koordinatensystem aufgespannte Ebene nennt man *Gaußsche Zahlenebene*.²

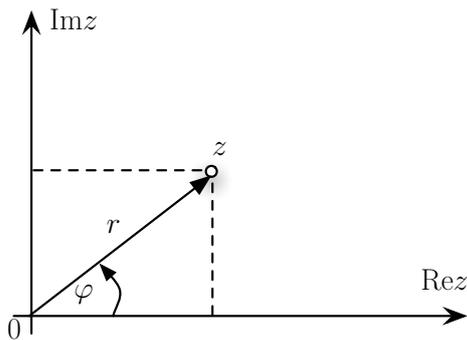


Die Abzisse ist die „*reelle Achse*“, die Ordinate die „*imaginäre Achse*“. Diese Bezeichnung darf nicht darüber hinwegtäuschen, daß der auf der Ordinate abgetragene Imaginärteil eine *reelle* Zahl ist. Die Gaußsche Zahlenebene ist also eine reelle Ebene, in der komplexe Zahlen als reelle Vektoren dargestellt werden. Daraus ergibt sich unmittelbar:

- Graphisch bedeutet der Übergang zur konjugiert-komplexen Zahl eine *Spiegelung* an der reellen Achse.
- Die Addition (Subtraktion) von zwei komplexen Zahlen erfolgt nach der *Parallelogrammregel* der Vektoraddition (-subtraktion).

Für die Multiplikation (Division) komplexer Zahlen ist eine andere Darstellung anschaulicher.

²In der englischsprachigen Literatur liest man dafür häufig die Bezeichnung Argand-Diagramm.



Wir beschreiben die Lage der komplexen Zahl z in der Gaußschen Zahlenebene durch

- die *Länge* r des „Zeigers“, der die Position der Zahl z mit dem Koordinatenursprung, dem „Pol“, verbindet,
- den *Winkel* φ , der von der „Polarachse“ (hier identisch mit der reellen Achse) entgegen dem Uhrzeigersinn bis zum Zeiger gezählt wird.

Das Koordinatenpaar (r, φ) bezeichnen wir als *Polarkoordinaten*; sie sind nicht an komplexe Zahlen gebunden. Speziell für komplexe Zahlen ist jedoch

$$r = |z| \quad \text{der Betrag der komplexen Zahl,}$$

$$\varphi = \arg z \quad \text{das Argument der komplexen Zahl.}$$

Die geometrische Bedeutung von $z\bar{z}$ finden wir wie folgt: Wir lesen $r^2 = x^2 + y^2$ ab und wissen bereits, daß $z\bar{z} = x^2 + y^2$ ist. Also ist

$$z\bar{z} = r^2.$$

Der Betrag einer komplexen Zahl ist also $r = \sqrt{z\bar{z}}$.

Die *Gleichheit* zweier komplexer Zahlen ist gegeben, wenn

$$|z_1| = |z_2| \quad \text{und} \quad \varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n, \quad n \text{ ganz.}$$

Das Argument ist also *nicht eindeutig*, da φ und $\varphi + 2\pi n$ auf den gleichen Zeiger in der Gaußschen Zahlenebene führen. Der Winkel φ aus dem Intervall $0 \leq \varphi < 2\pi$ heißt *Hauptwert* des Arguments.

Zusammenhang mit der Standard-Darstellung Wir lesen aus der Abbildung

$$\left. \begin{array}{l} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{array} \right\} \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

ab und kommen somit auf die Darstellung

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

die wir *Polar-Darstellung* einer komplexen Zahl nennen.

Beispielea) $z = i$ Dafür ist $r = \sqrt{z\bar{z}} = 1$ und (wie aus der Anschauung zu erwarten)

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 = \cos \varphi \\ y = 1 = \sin \varphi \end{array} \right\} \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

b) Wegen $|z| = r$ muß $|\cos \varphi + i \sin \varphi| = 1$ sein. Tatsächlich ist

$$|\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \varphi - i \sin \varphi)} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1.$$

Anmerkung Wir hätten die komplexen Zahlen auch so einführen können:Die Entstehung der Zahlengeraden können wir uns so vorstellen, daß der Zahlenstrahl, auf dem die positiven Zahlen abgetragen werden, um 180° gedreht wird. Um zu den komplexen Zahlen zu gelangen, hätten wir nach der Bedeutung beliebiger Drehwinkel fragen können.Wir betrachten nun die *Multiplikation* zweier komplexer Zahlen in Polar-Darstellung:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt von den Additionstheoremen

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \text{und} \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

für die sin- und die cos-Funktion Gebrauch gemacht.³ Das Produkt $z_1 z_2$ ist wieder eine komplexe Zahl mit der Polardarstellung $r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Der Vergleich ergibt

$$r = r_1 r_2, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2.$$

Entsprechend ergibt sich für die *Division* $\frac{z_1}{z_2}$ (Übungsaufgabe)

$$r = \frac{r_1}{r_2}, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Damit können wir folgenden Merksatz formulieren:

Zwei komplexe Zahlen werden multipliziert (dividiert), indem man ihre Beträge multipliziert (dividiert) und ihre Argumente addiert (subtrahiert).

2.3. Die Formeln von Euler und Moivre

Wir knüpfen an die Polardarstellung einer komplexen Zahl an und betrachten die Funktion

$$f(\varphi) = \cos \varphi + i \sin \varphi,$$

³Diese Additionstheoreme werden in dem Kapitel über Vektorrechnung hergeleitet.

indem wir nun das Argument φ als Variable auffassen. Ihre Ableitung ist

$$f'(\varphi) \equiv \frac{df}{d\varphi} = -\sin \varphi + i \cos \varphi = i(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

also

$$f'(\varphi) = if(\varphi).$$

Dies ist eine Differentialgleichung. Anstelle der Anwendung einer allgemeinen Lösungstheorie, die wir hier ohnehin noch nicht zur Verfügung haben, stellen wir eine einfache Frage, die den Inhalt dieser Differentialgleichung zum Ausdruck bringt: Welche Funktion reproduziert sich bei einmaliger Ableitung bis auf einen konstanten Faktor (der hier die imaginäre Einheit ist)? Diese Eigenschaft führt direkt auf die *Exponentialfunktion* (siehe Kapitel 1). Wir machen also den *Ansatz*

$$f(\varphi) = ke^{i\varphi},$$

denn es ist

$$f'(\varphi) = ike^{i\varphi} = if(\varphi).$$

Nun ist noch die Konstante k zu bestimmen. Hierfür genügt ein spezieller Wert von φ , da die Konstante für alle Winkel φ gleich ist. Speziell gilt für $\varphi = 0$ in der betrachteten Funktion $f(0) = 1$ und im Ansatz $f(0) = k$, also $k = 1$.

Wir erhalten als Resultat die *Eulersche Formel*

$$\boxed{\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi}}.$$

Anmerkung An dieser Stelle haben wir ganz formal gerechnet, ohne *vorher* zu wissen, was das Symbol $e^{i\varphi}$ eigentlich bedeutet. $e^{i\varphi}$ erhält durch die Eulersche Formel erst seine Bedeutung. Ein anderer Zugang zur Eulerschen Formel ist die Reihenentwicklung, (siehe Kapitel 7).

Insbesondere ist die Exponentialfunktion mit einem rein imaginären Argument periodisch, mit einem reellen bekanntlich nicht. Es ist

$$|e^{i\varphi}| = 1.$$

Wir haben somit eine dritte Darstellung komplexer Zahlen, die aus der Polardarstellung hervorgeht, die *Exponential-Darstellung*:

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}.$$

Beispiele

a) $z = i$

Es ist $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Also ist die Exponentialdarstellung der imaginären Einheit

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

b) $z = -1$

Es ist $r = 1$, $\varphi = \pi$, also

$$-1 = e^{i\pi} \quad \text{oder} \quad e^{i\pi} + 1 = 0.$$

c) Für $z = ce^{p+iq} = ce^p(\cos q + i \sin q)$ ist

$$\operatorname{Re} z = ce^p \cos q, \quad \operatorname{Im} z = ce^p \sin q$$

$$|z| = r = |c|e^p, \quad \arg z = q.$$

Wir fragen nun, wie man eine komplexe Zahl in die n -te Potenz erhebt. Da der Betrag einer komplexen Zahl reell ist, reicht es offenbar aus, $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n$ zu untersuchen.

- 1. Schritt: Wir beginnen mit $n = 0, 1, 2, \dots$ und ersetzen in der Eulerschen Formel φ durch $n\varphi$:

$$\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) = e^{in\varphi} = (e^{i\varphi})^n = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n.$$

- 2. Schritt: Die Erweiterung auf negative Exponenten ergibt mit $n = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} (\cos \varphi + i \sin \varphi)^{-n} &= \frac{1}{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n} \frac{(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n}{(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n} = \frac{(\cos \varphi - i \sin \varphi)^n}{\underbrace{(\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^n}_{=1}} \\ &= [\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)]^n = \cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi). \end{aligned}$$

Dabei haben wir benutzt, daß die \cos -Funktion eine gerade und die \sin -Funktion eine ungerade Funktion ist.

- 3. Schritt: Positive und negative Exponenten zusammenfassend erhalten wir als Resultat die *Moivresche Formel*

$$\boxed{(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Beispiel Wir berechnen $(-1 + i)^{-8}$.

Es sei $z = -1 + i$. Dann ist $r = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{2}$ und

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{Re} z = x = -1 &= r \cos \varphi \\ \operatorname{Im} z = y = +1 &= r \sin \varphi \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \cos \varphi &= -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin \varphi &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{aligned}, \quad \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Damit wird

$$(-1 + i)^{-8} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^{-8} = \frac{1}{16}e^{-6\pi i} = \frac{1}{16} \quad (\text{reell}).$$

2.4. Radizieren komplexer Zahlen, Kreisteilung

Unser Ziel ist die Berechnung von $z = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}$.

Wir schreiben

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = s(\cos \vartheta + i \sin \vartheta),$$

denn das Ergebnis ist im allgemeinen eine (noch unbekannte) komplexe Zahl. Damit wird mit Hilfe der Moivreschen Formel

$$\begin{aligned} r(\cos \varphi + i \sin \varphi) &= s^n(\cos \vartheta + i \sin \vartheta)^n \\ &= s^n[\cos(n\vartheta) + i \sin(n\vartheta)]. \end{aligned}$$

Ein Vergleich zeigt für den Betrag $s = \sqrt[n]{r}$ und für Real- und Imaginärteil

$$\left. \begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(n\vartheta) \\ \sin \varphi &= \sin(n\vartheta) \end{aligned} \right\} \quad n\vartheta = \varphi + 2\pi \cdot k, \quad (k \text{ ganz})$$

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \cdot \frac{k}{n}.$$

Das sind n verschiedene Werte für $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$. Das Resultat ist also

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left[\cos \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) + i \sin \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi k}{n} \right) \right].$$

Das entspricht graphisch n Punkten auf einem Kreis vom Radius $\sqrt[n]{r}$. Oder anders gesagt: Die Zeiger der Lösungen („Wurzeln“) z_k bestimmen die Eckpunkte eines regelmäßigen n -Ecks, das in diesen Kreis eingeschrieben ist.

Beispiele

a) $\sqrt{-1}$

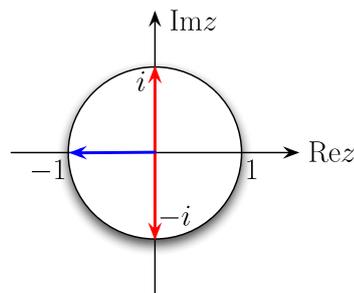
Es ist $r = 1$, $\varphi = \pi$ und $n = 2$, $k = 0, 1$.

Damit wird

$$\sqrt{-1} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} + \pi k \right).$$

$$k = 0: \quad \sqrt{-1} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$k = 1: \quad \sqrt{-1} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i$$



b) \sqrt{i}

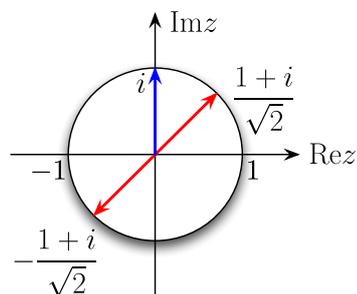
Es ist $r = 1$, $\varphi = \pi$ und $n = 2$, $k = 0, 1$.

Damit wird

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right).$$

$$\begin{aligned} k = 0: \quad \sqrt{i} &= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k = 1: \quad \sqrt{i} &= \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \\ &= -\frac{1}{2}\sqrt{2}(1 + i) \end{aligned}$$



c) $\sqrt[n]{1}$

Es ist $r = 1$, $\varphi = 0$ und n , $k = 0, 1, \dots, (n-1)$. Damit sind die n -ten Einheitswurzeln

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(\frac{2\pi k}{n}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi k}{n}\right).$$

Sie haben folgende Eigenschaften:

- Reelle Lösungen:

$$\left. \begin{array}{l} k = 0: \quad z_0 = 1 \\ k = \frac{n}{2}, \quad n \text{ gerade: } z_{n/2} = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} n \text{ ungerade: eine reelle Lösung} \\ n \text{ gerade: zwei reelle Lösungen} \end{array}$$

- Komplexe Lösungen:

Es sei $j < \frac{n}{2}$ ganz. Dann ist

$$z_j = \cos \frac{2\pi j}{n} + i \sin \frac{2\pi j}{n}$$

und

$$\begin{aligned} z_{n-j} &= \cos \frac{2\pi(n-j)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-j)}{n}, \quad (\text{Additionstheoreme}) \\ &= \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} \cos \frac{2\pi j}{n} + \underbrace{\sin 2\pi}_{=0} \sin \frac{2\pi j}{n} \\ &\quad + i \left(\underbrace{\sin 2\pi}_{=0} \cos \frac{2\pi j}{n} - \underbrace{\cos 2\pi}_{=1} \sin \frac{2\pi j}{n} \right) \\ &= \cos \frac{2\pi j}{n} - i \sin \frac{2\pi j}{n}. \end{aligned}$$

- Resultat:

$$z_{n-j} = \bar{z}_j.$$

2.5. Funktionen von komplexen Argumenten

Wir betrachten weitere Funktionen mit komplexen (oder rein imaginären) Argumenten und legen dabei besonderen Wert auf die Diskussion der Logarithmus-Funktion.

Die Logarithmus-Funktion Für die Exponentialdarstellung der imaginären Einheit haben wir

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

gefunden.

Daraus erhalten wir durch Anwendung der Umkehrfunktion nicht einfach $\ln i = i\frac{\pi}{2}$.

Stets ist $i = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot 1$, und die Exponentialdarstellung der reellen Zahl 1 ist

$$1 = e^{2\pi ni} = \cos(2\pi n) + i \sin(2\pi n), \quad n \text{ ganz.}$$

Also ist

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{2\pi ni} = e^{i\frac{\pi}{2} + 2\pi ni},$$

was nichts weiter bedeutet, als die für die Darstellung von i belanglose Multiplikation von $e^{i\frac{\pi}{2}}$ mit eins. Für $\ln i$ erhalten wir aber *verschiedene* (rein imaginäre) Zahlen

$$\ln i = i\frac{\pi}{2} + 2\pi ni, \quad n \text{ ganz.}$$

Die Exponentialdarstellung der Zahl -1 war

$$-1 = e^{i\pi}.$$

Dementsprechend ist

$$\ln(-1) = i\pi + 2\pi ni, \quad n \text{ ganz.}$$

Hyperbel- und Kreisfunktionen Wir betrachten nochmals die Eulersche Formel und ihre konjugiert-komplexe Form,

$$\begin{aligned} \cos \varphi + i \sin \varphi &= e^{i\varphi} \\ \cos \varphi - i \sin \varphi &= e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

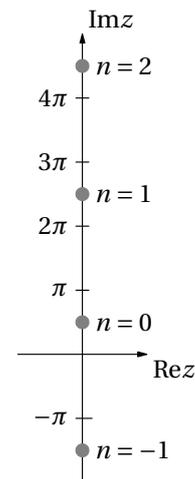
Durch Addition der beiden Formeln erhalten wir

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}) = \cosh(i\varphi),$$

durch Subtraktion

$$\sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) = -i \sinh(i\varphi).$$

Beide Ergebnisse erklären, was die Funktionen \cosh und \sinh mit einem rein imaginären Argument bedeuten sollen. Sie machen auch die Anlehnung an die Begriffe \cos und \sin plausibel,



Darstellung von $\ln i$ in der Gaußschen Zahlenebene

jedoch noch nicht den Zusatz „hyperbolicus“. Aus dem „trigonometrischen Pythagoras“ folgt die schon bekannte Beziehung (siehe oben)

$$1 = \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = \cosh^2(i\varphi) + (-i)^2 \sinh^2(i\varphi) = \cosh^2(i\varphi) - \sinh^2(i\varphi).$$

Durch die Ersetzung $\varphi \rightarrow i\varphi$ erhalten wir die Kreisfunktionen von rein imaginären Argumenten:

$$\begin{aligned}\cos(i\varphi) &= \cosh(-\varphi) = \cosh \varphi \\ \sin(i\varphi) &= -i \sinh(-\varphi) = i \sinh \varphi.\end{aligned}$$

Beispiel Wir lösen die Gleichung $\cosh z = -1$, die im Bereich der reellen Zahlen keine Lösung hat. Wir erwarten daher rein imaginäre Lösungen.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} (e^z + e^{-z}) &= -1 \\ e^z + e^{-z} &= -2 \\ e^z + e^{-z} + 2 &= 0 \quad | \cdot e^z \\ e^{2z} + 1 + 2e^z &= 0 \\ (e^z + 1)^2 &= 0 \\ e^z = -1 &= e^{(2n+1)\pi i}\end{aligned}$$

Ein Exponentenvergleich ergibt

$$z = (2n + 1)\pi i, \quad n \text{ ganz.}$$

2.6. Zusätzlicher Inhalt:

Beweis der Moivreschen Formel durch vollständige Induktion

Die Methode der vollständigen Induktion, auch „Schluß von n auf $(n + 1)$ “ genannt, ist ein mathematisches Beweisverfahren, das auf folgendem Satz beruht:

Eine Aussage ist für jede natürliche Zahl n richtig, wenn

- a) sie für $n = 1$ richtig ist und
- b) aus der Richtigkeit der Aussage für eine willkürliche natürliche Zahl $n = k$ die Richtigkeit für $n = k + 1$ folgt.

Wir wenden dieses Verfahren nun an, um die Moivresche Formel

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)$$

zu beweisen.

- 1. Schritt: Induktionsanfang
Wir stellen fest, daß die Moivresche Formel für $n = 1$ richtig ist.
- 2. Schritt: Induktionsvoraussetzung
Die Formel gelte für eine beliebige natürliche Zahl $n = k$,

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^k = \cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi).$$

- 3. Schritt: Induktionsbehauptung

Die Formel gilt dann auch für $n = k + 1$,

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} = \cos[(k+1)\varphi] + i \sin[(k+1)\varphi].$$

- 4. Schritt: Induktionsbeweis

$$\begin{aligned}(\cos \varphi + i \sin \varphi)^{k+1} &= (\cos \varphi + i \sin \varphi)^k \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \\ &= [\cos(k\varphi) + i \sin(k\varphi)] \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (\text{nach Voraussetzung}) \\ &= [\cos(k\varphi) \cos \varphi - \sin(k\varphi) \sin \varphi] \\ &\quad + i[\sin(k\varphi) \cos \varphi + \cos(k\varphi) \sin \varphi] \\ &= \cos[(k+1)\varphi] + i \sin[(k+1)\varphi] \quad (\text{Additionstheoreme}) \quad \text{q.e.d.}\end{aligned}$$

Damit ist die Richtigkeit der Moivreschen Formel durch vollständige Induktion bewiesen.

3. Vektoralgebra: Skalarprodukt und Vektorprodukt

3.1. Wiederholung: Vektoren

Wir geben zunächst eine vorläufige Definition des Begriffs „Vektor“, die wir später in diesem Kapitel ergänzen und präzisieren werden. Dazu beginnen wir mit räumlichen Verschiebungen oder Translationen.

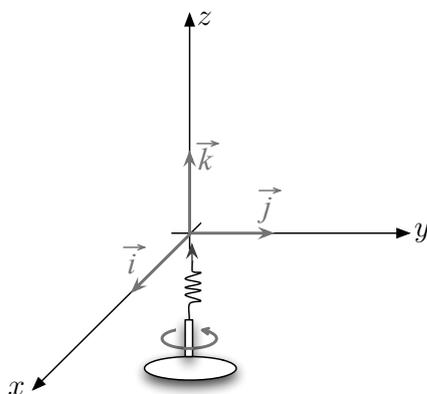
Unter einer *Translation* wollen wir eine Bewegung des Raumes verstehen, bei der sämtliche Punkte gleich lange und gleich gerichtete Strecken zurücklegen. Die Kenntnis einer beliebigen dieser Strecken bestimmt die Translation vollständig. Der Ausgangspunkt der Strecke ist dabei unwesentlich. Zur Beschreibung solcher Translationen führt man den Begriff des Vektors ein.

Vektoren sind geometrische oder physikalische Größen, die man durch Angabe eines Betrages und einer Richtung festlegt und dadurch eindeutig den Translationen zuordnet.

Einige Beispiele sind der Verschiebungsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung, die Kraft, auch die elektrische und magnetische Feldstärke und viele andere mehr.

Von besonderer Bedeutung ist der *Ortsvektor*. Dieser stellt eine gerichtete Strecke mit fest gewähltem Ausgangspunkt (Ursprung des Koordinatensystems) dar. Er charakterisiert so die Lage seines Endpunktes. Der Ortsvektor ist also dem „Zeiger“ vergleichbar, der als geometrisches Objekt geordnete Zahlenpaare (komplexe Zahlen) in der Gaußschen Zahlenebene charakterisiert.

Jede Translation (jeder Vektor) kann eindeutig in Anteile nach drei beliebig vorgegebenen (aber nicht in einer Ebene liegenden) Richtungen zerlegt werden.



Dazu wählen wir ein *rechtshändiges Koordinatensystem* mit *Basisvektoren* \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} .^a Rechtshändigkeit ist durch die „Korkenzieher“- oder „Rechtsschrauben-Regel“ erklärt: Wenn der Korkenzieher in der üblichen Rechtsdrehung auf *kürzestem Wege* den Vektor \vec{i} in den Vektor \vec{j} überführt, schiebt er sich in Richtung des Vektors \vec{k} vor. Von der Spitze des Vektors \vec{k} aus gesehen erfolgt die Drehung $\vec{i} \rightarrow \vec{j}$ *entgegen* dem Uhrzeigersinn.

^aFür die Basisvektoren sind anstelle von \vec{i} auch die Bezeichnungen \vec{e}_1 oder \vec{e}_x und entsprechend für \vec{j} und \vec{k} \vec{e}_2 oder \vec{e}_y bzw. \vec{e}_3 oder \vec{e}_z in Gebrauch.

Jeder Vektor ist als Produkt aus Betrag und Einheitsvektor darstellbar. Es ist

$$\vec{a} = a \cdot \vec{e}.$$

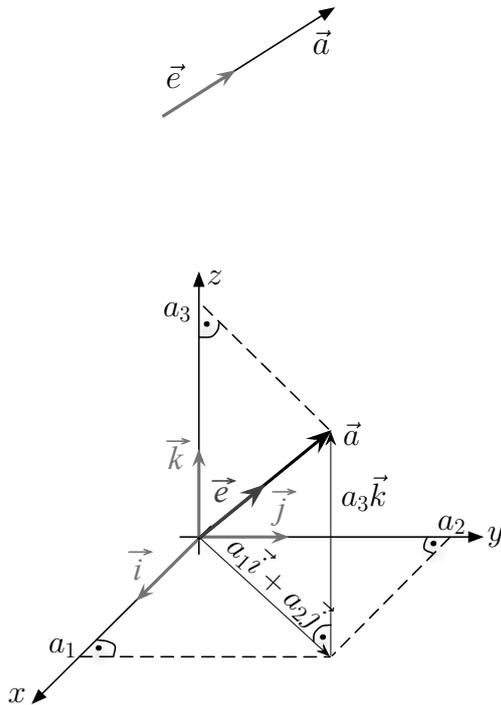
Der *Einheitsvektor* \vec{e} stimmt nach Richtung und Richtungssinn mit \vec{a} überein und hat den Betrag 1.

Der *Betrag* a ist eine positive Maßzahl, also ein Skalar (numerischer Wert auf der Zahlen-, „Leiter“, der scala)

Spezielle Einheitsvektoren sind die Vektoren \vec{i} , \vec{j} und \vec{k} . Mit ihrer Hilfe läßt sich jeder beliebige Vektor \vec{a} gemäß

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

zerlegen. Die Faktoren a_1 , a_2 , a_3 heißen *Koordinaten* von \vec{a} . Die Vektoren $a_1 \vec{i}$, $a_2 \vec{j}$ und $a_3 \vec{k}$ bezeichnet man als *Komponenten* des Vektors \vec{a} . Der Sprachgebrauch ist jedoch nicht einheitlich; so werden oft auch a_1 , a_2 , a_3 als *Komponenten* bezeichnet.



Aus der Abbildung ist weiterhin abzulesen, daß

- $a_3 = 0$ ist, falls der Vektor \vec{a} in der (x, y) -Ebene liegt,
- der *Betrag* (Länge, Norm) von \vec{a} durch

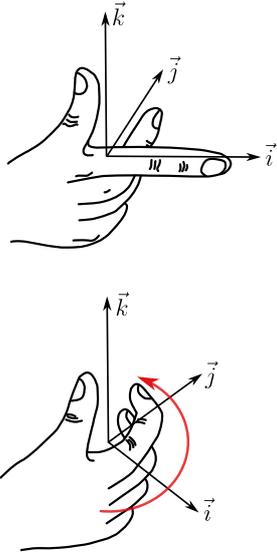
$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (\text{„räumlicher Pythagoras“})$$

gegeben ist,

- der zu \vec{a} gehörige *Einheitsvektor* \vec{e} durch Division dieses Vektors durch seinen Betrag berechnet wird,

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k})$$

(Normierung von \vec{a}).



Anmerkung: Daß die Basis-Einheitsvektoren \vec{i} , \vec{j} , \vec{k} ein rechtshändiges Dreibein aufspannen, wird gegentlich durch die *Rechte-Hand-Regel* anstelle der *Korkenzieher-Regel* beschrieben. Diese besagt in zwei verschiedenen Formulierungen:

- Wenn der Zeigefinger der *rechten* Hand in die Richtung des Vektors \vec{i} zeigt und der Mittelfinger in die Richtung von \vec{j} , weist der Daumen in die Richtung von \vec{k} . (Eine zyklisch vertauschte Zuordnung der drei Vektoren und der drei Finger der rechten Hand bewahrt die Rechtshändigkeit, siehe Vektorprodukt.)
- Wenn sich die Finger der *rechten* Hand, ausgehend vom Vektor \vec{i} , zum Vektor \vec{j} hin krümmen, zeigt der Daumen in die Richtung von \vec{k} .

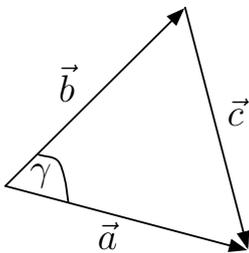
3.2. Skalarprodukt

In diesem Abschnitt behandeln wir das Skalarprodukt. Es findet in der Physik beispielsweise Anwendung bei der Berechnung der Arbeit.

Wir stellen zuerst die Frage: Wie wird der *Winkel zwischen zwei Vektoren* durch deren Komponenten ausgedrückt?

Aus der Abbildung lesen wir ab

$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}.$$



Mit dem Kosinussatz der Trigonometrie,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma,$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} |\vec{a} - \vec{b}|^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma \\ 2ab \cdot \cos \gamma &= a^2 + b^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2. \end{aligned}$$

Das ist explizit in Komponenten

$$2ab \cdot \cos \gamma = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2$$

und nach maximal möglicher Vereinfachung

$$ab \cdot \cos \gamma = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \equiv \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Dieses Ergebnis nennen wir *Skalarprodukt* $\vec{a} \cdot \vec{b}$.¹

Das Skalarprodukt kann auch auf andere Weise gelesen werden:

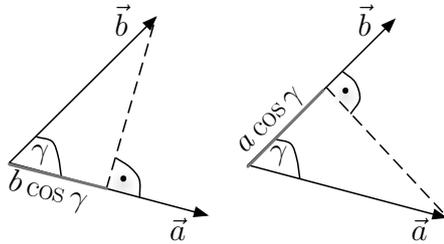
¹Beim Skalarprodukt wird der Punkt als Multiplikationssymbol oftmals weggelassen, falls dadurch keine Mißverständnisse entstehen.

a)

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a}}{a} \cdot \frac{\vec{b}}{b}$$

In Worten: Das Skalarprodukt zweier *Einheitsvektoren* ist der Cosinus des Winkels zwischen ihnen.

b)



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a(b \cos \gamma) = b(a \cos \gamma)$$

In Worten: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist das Produkt des Betrages eines dieser Vektoren mit der *Projektion* des anderen Vektors auf dessen Richtung.

Eigenschaften des Skalarprodukts

- Das Skalarprodukt
 - wird gebildet aus zwei Vektoren, ergibt selbst aber einen *Skalar*,
 - ist kommutativ: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
 - ist *nicht* assoziativ: $(\vec{a}\vec{b})\vec{c}$ ist ein Vektor in Richtung von \vec{c} , $\vec{a}(\vec{b}\vec{c})$ ist jedoch ein Vektor in Richtung von \vec{a} .

- *Betrag* eines Vektors: Für $\vec{a} = \vec{b}$, also $\gamma = 0$, wird

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \geq 0$$

und damit

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

- Algebraischer *Orthogonalitätstest*: Für $\vec{a} \perp \vec{b}$, also $\gamma = \frac{\pi}{2}$, wird

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

- Die vielleicht wichtigste Eigenschaft des Skalarprodukts, nämlich seine *Invarianz gegenüber Drehungen des Koordinatensystems*, werden wir in einem separaten Abschnitt in diesem Kapitel behandeln.

Beispiele

a)

\cdot	\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
\vec{i}	1	0	0
\vec{j}	0	1	0
\vec{k}	0	0	1

Die *Basisvektoren* $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sind paarweise orthogonal und normiert (orthonormierte Basis)

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0.$$

Multiplikationstabelle für das Skalarprodukt

Wir gelangen zurück zur Komponentendarstellung

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3,$$

wenn wir auf

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}) (b_1 \vec{i} + b_2 \vec{j} + b_3 \vec{k})$$

das *Distributivgesetz* anwenden („ausmultiplizieren“) und die Multiplikationstabelle berücksichtigen.

b) Aus

$$\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j} + a_3 \vec{k}$$

erhalten wir durch skalare Multiplikation mit den Basisvektoren

$$a_1 = \vec{a} \cdot \vec{i}, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \vec{j}, \quad a_3 = \vec{a} \cdot \vec{k}.$$

In Worten: Die Komponenten eines Vektors sind die Projektionen des Vektors auf die Koordinatenachsen. Damit haben wir die Darstellung

$$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{i}) \vec{i} + (\vec{a} \cdot \vec{j}) \vec{j} + (\vec{a} \cdot \vec{k}) \vec{k}$$

mit den Koeffizienten

$$\left. \begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{i} &= a \cdot \cos \alpha \longrightarrow \cos \alpha = \frac{a_1}{a} \\ \vec{a} \cdot \vec{j} &= a \cdot \cos \beta \longrightarrow \cos \beta = \frac{a_2}{a} \\ \vec{a} \cdot \vec{k} &= a \cdot \cos \gamma \longrightarrow \cos \gamma = \frac{a_3}{a} \end{aligned} \right\} \text{Richtungscosinüs.}$$

In diesen drei Formeln sind α, β, γ die Winkel, die der Vektor \vec{a} mit den Koordinatenachsen einschließt. Zwischen ihnen besteht der Zusammenhang

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = 1.$$

c) Übungsbeispiel: Es sei $\vec{a} = a_1 \vec{i} + a_2 \vec{j}$ ein Vektor in der (x, y) -Ebene. Wir suchen einen Einheitsvektor \vec{n} in dieser Ebene, der zu \vec{a} orthogonal ist. Der Ansatz

$$\vec{n} = n_1 \vec{i} + n_2 \vec{j}$$

bringt zum Ausdruck, dass \vec{n} in der (x, y) -Ebene liegen soll. Der Vektor \vec{n} soll ein Einheitsvektor sein, also

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = n_1^2 + n_2^2 \stackrel{!}{=} 1,$$

und er soll zu \vec{a} orthogonal sein, also

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = n_1 a_1 + n_2 a_2 \stackrel{!}{=} 0.$$

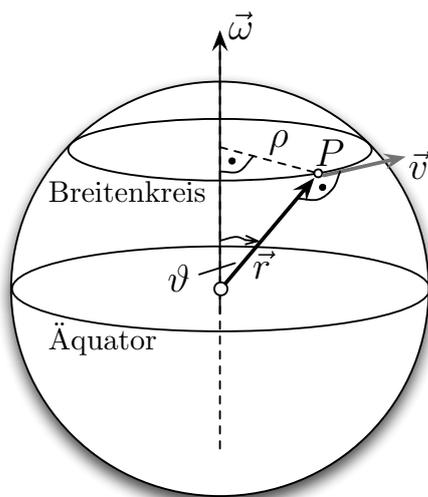
Beide Bedingungen stellen ein Gleichungssystem für n_1 und n_2 dar. Die beiden Lösungen für den gesuchten Vektor sind demnach

$$\vec{n} = \mp \frac{a_2 \vec{i} - a_1 \vec{j}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

3.3. Vektorprodukt

Das Vektorprodukt findet in der Physik Anwendung z.B. bei Drehbewegungen. Es kommt in den Begriffen „Drehmoment“ und „Drehimpuls“ vor.

Wir wollen in einem ersten Beispiel die Frage stellen: Wie groß ist die *Bahngeschwindigkeit* eines Punktes P der Erdoberfläche infolge der Drehung der Erde um ihre eigene Achse?



- Wir beschreiben den Punkt P durch seinen Ortsvektor \vec{r} , der ihn mit dem Erdmittelpunkt verbindet.

- Wir beschreiben die Erddrehung durch den Vektor der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$:

Betrag ω : Winkelgeschwindigkeit $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Richtung: Drehachse (Erdachse); von der „Spitze“ von $\vec{\omega}$ aus betrachtet, erfolgt die Drehung entgegen dem Uhrzeigersinn.

- Winkel („Poldistanz“)

$$\begin{aligned} \sphericalangle(\vec{r}, \vec{\omega}) &= \vartheta \\ &= (90^\circ - \text{geographische Breite}), \end{aligned}$$

- P bewegt sich auf einem *Breitenkreis* mit dem Radius ρ . Die Kreisbahngeschwindigkeit ist $v = \rho \cdot \omega$.

- Der Zusammenhang von ρ und $r = |\vec{r}|$ ist

$$\rho = r \cdot \sin \vartheta.$$

- Resultat:

$$v = r \omega \cdot \sin \vartheta.$$

Da v der Betrag des Vektors \vec{v} ist, haben wir einen wesentlichen Unterschied zum Skalarprodukt. Wir schreiben $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ und definieren in Übereinstimmung mit dem Beispiel das **Vektorprodukt**² $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$ wie folgt:

Betrag:

$$c = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \cdot \sin \vartheta \quad \text{mit} \quad \vartheta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}).$$

Richtung:

- $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$
- „Korkenzieherregel“: Überführt man den ersten Faktor \vec{a} mit einer Rechtsschraube *auf kürzestem Weg* in den zweiten Faktor \vec{b} , so ist die Richtung, in die sich ein Korkenzieher vorschieben würde, die Richtung von \vec{c} .³

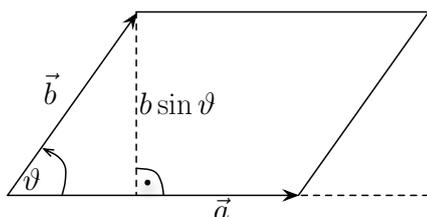
Eigenschaften des Vektorprodukts

- Das Vektorprodukt ist
 - selbst wieder ein *Vektor* (im Gegensatz zum Skalarprodukt),
 - *nicht kommutativ*, denn: Bei Vertauschung der Faktoren und Beibehaltung der Korkenzieherregel ändert der Produktvektor seinen Richtungssinn um 180° ,

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}.$$

Insbesondere ist $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

- Geometrische Interpretation des Betrages:



- Flächeninhalt des von \vec{a} und \vec{b} aufgespannten Parallelogramms.
(Hier offensichtlich: Wenn $\vec{a} = \vec{b}$, ist $|\vec{a} \times \vec{a}| = 0$.)
- Produkt aus dem Betrag eines Vektors und der Komponente des anderen, die auf diesem senkrecht steht.

•

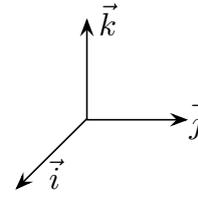
$$\left. \begin{array}{l} \text{Parallelität:} \quad \vec{a} \uparrow \vec{b}, \text{ soda\ss } \vartheta = 0 \\ \text{Antiparallelität:} \quad \vec{a} \updownarrow \vec{b}, \text{ soda\ss } \vartheta = \pi \end{array} \right\} \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}.$$

²Das Vektorprodukt wird oft auch als Kreuzprodukt bezeichnet.

³Die oben eingeführte Rechte-Hand-Regel ist direkt auf das Vektorprodukt übertragbar, da in dem Produkt ($\vec{a} \times \vec{b}$) nicht vorausgesetzt wird, daß die Faktoren \vec{a} und \vec{b} einen rechten Winkel einschließen, wie das bei den Basisvektoren aber der Fall ist.

Beispiel Basisvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

		zweiter Faktor		
		\vec{i}	\vec{j}	\vec{k}
erster Faktor	\vec{i}	0	\vec{k}	$-\vec{j}$
	\vec{j}	$-\vec{k}$	0	\vec{i}
	\vec{k}	\vec{j}	$-\vec{i}$	0



Multiplikationstabelle für das Vektorprodukt

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}, \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$$

Die drei Vektorprodukte der letzten Zeile gehen durch zyklische Vertauschung

$$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}) \rightarrow (\vec{k}, \vec{i}, \vec{j}) \rightarrow (\vec{j}, \vec{k}, \vec{i}) \rightarrow (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

auseinander hervor.

Wie das folgende Beispiel zeigt, ist das Vektorprodukt *nicht assoziativ*:

$$\begin{aligned} \vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) &= \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \\ (\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Nun wollen wir den Produktvektor \vec{c} durch die Komponenten der Faktoren darstellen. Dazu wenden wir auf

$$\vec{c} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

das *Distributivgesetz* an („Ausmultiplizieren“), was natürlich nachträglich noch gerechtfertigt werden muss, berücksichtigen die Multiplikationstabelle und erhalten als Resultat

$$\vec{c} = (a_2b_3 - a_3b_2)\vec{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\vec{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\vec{k}.$$

Wir erkennen, daß die 1-Komponente (oder x - oder \vec{i} -Komponente) von \vec{c} nur die 2- und 3-Koordinaten der Faktoren \vec{a} und \vec{b} enthält, nicht jedoch deren 1-Koordinate. Entsprechendes gilt für die 2- und 3-Komponente von \vec{c} .

Es ist nun zu zeigen, dass dieses Ergebnis mit der ursprünglichen Definition des Vektorprodukts übereinstimmt.

- 1. Schritt: Der Betrag

$$|\vec{c}|^2 = (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2$$

stimmt überein mit

$$\begin{aligned} a^2b^2 \sin^2 \vartheta &= a^2b^2 (1 - \cos^2 \vartheta) = a^2b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2, \end{aligned}$$

was wir durch Ausmultiplizieren leicht zeigen können.

- 2. Schritt: Orthogonalität $\vec{c} \perp \vec{a}$ und $\vec{c} \perp \vec{b}$. Es ist

$$\vec{c} \cdot \vec{a} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 = 0$$

und entsprechend $\vec{c} \cdot \vec{b} = 0$.

- 3. Schritt: Korkenzieherregel

Wir weisen hier nur den Spezialfall nach, bei dem die vektoriellen Faktoren \vec{a} und \vec{b} in der (x, y) -Ebene liegen ($a_3 = 0 = b_3$). Dann ist $\vec{c} = (a_1 b_2 - a_2 b_1) \vec{k}$.

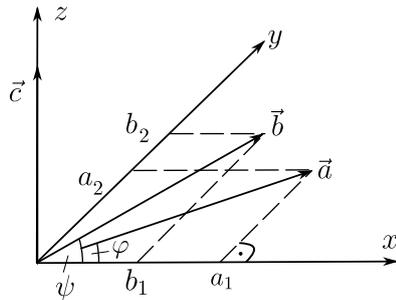
Aus der Abbildung lesen wir

$$\tan \varphi = \frac{a_2}{a_1} \quad \text{und} \quad \tan \psi = \frac{b_2}{b_1}$$

ab. Für $\psi > \varphi$ ist auch $\tan \psi > \tan \varphi$ und damit

$$\frac{b_2}{b_1} > \frac{a_2}{a_1} \quad \text{sowie} \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 > 0.$$

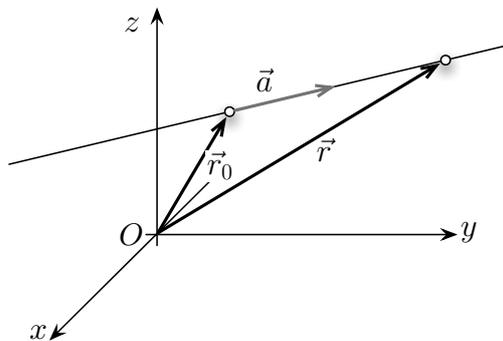
Der Vektor \vec{c} hat also die Richtung der positiven z -Achse, was zu beweisen war.



3.4. Geometrische Anwendungen mit physikalischer Bedeutung

Bestimmung einer Geraden durch Punkt und Richtung Aus der Abbildung lesen wir die *Parameterdarstellung einer Geraden* ab (Vektoraddition),

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}.$$



Das ist, in Komponenten zerlegt,

$$\left. \begin{aligned} x - x_0 &= \lambda a_1 \\ y - y_0 &= \lambda a_2 \\ z - z_0 &= \lambda a_3 \end{aligned} \right\} \lambda = \frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} = \frac{z - z_0}{a_3}$$

Darin bedeuten

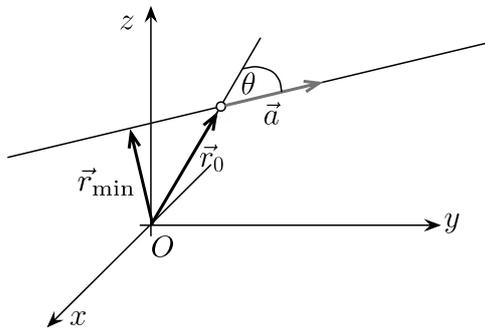
\vec{r}_0 : Ortsvektor eines fest vorgegebenen Punktes auf der Geraden

λ : Parameter, sodaß $\vec{r} = \vec{r}_0$ für $\lambda = 0$

\vec{a} : konstanter Richtungsvektor (nicht notwendig Einheitsvektor).

Ein Beispiel aus der Physik ist die geradlinig-gleichförmige Bewegung, wobei dann $\vec{a} \rightarrow \vec{v}$ die konstante Geschwindigkeit, und $\lambda \rightarrow t$ die Zeit bedeuten.

Wir fragen nun nach demjenigen Punkt auf der Geraden, der dem Koordinatenursprung am nächsten ist. Anders gefragt: Für welchen Parameter λ ist $|\vec{r}|$ (oder $\vec{r} \cdot \vec{r}$) *minimal*?



Dies entspricht der *Extremwertaufgabe*

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r} \cdot \vec{r}) \stackrel{!}{=} 0.$$

Es ist

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = \frac{d}{d\lambda}(x^2 + y^2 + z^2).$$

Mit $x = x(\lambda)$, $y = y(\lambda)$, $z = z(\lambda)$ erhalten wir (Kettenregel)

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2x \frac{dx}{d\lambda} + 2y \frac{dy}{d\lambda} + 2z \frac{dz}{d\lambda}.$$

Dieses Resultat kann als Skalarprodukt

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \left(\frac{dx}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dy}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dz}{d\lambda}\vec{k} \right)$$

geschrieben werden. Für den Vektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, worin die *Basisvektoren* fest sind, können wir

$$\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \frac{dx}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dy}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dz}{d\lambda}\vec{k}$$

schreiben. Also:

Wir differenzieren einen Vektor nach einem Parameter (hier λ), indem wir ihn komponentenweise nach diesem Parameter differenzieren.

Somit erhalten wir ein Ergebnis, das wir als *Produktregel* von vornherein hätten erwarten können, nämlich

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r} \frac{d\vec{r}}{d\lambda}.$$

Mit $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a}$ wird $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{a}$, und aus der Forderung $\frac{d}{d\lambda}(\vec{r} \cdot \vec{r}) = 0$ erhalten wir $\vec{r} \cdot \vec{a} = 0$. Der gesuchte Vektor \vec{r} ist also – wie zu erwarten – das *Lot* vom Koordinatenursprung auf die Gerade.

Der spezielle Parameter λ , der den Fußpunkt dieses Lotes beschreibt, folgt aus

$$\vec{r} \cdot \vec{a} = (\vec{r}_0 + \lambda\vec{a}) \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{zu} \quad \lambda = -\frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{a}}{a^2}.$$

Somit ist der Ortsvektor \vec{r}_{\min} des Punktes auf der Geraden, der dem Nullpunkt am nächsten liegt, durch

$$\vec{r}_{\min} = \vec{r}_0 - \frac{(\vec{r}_0 \cdot \vec{a})}{a^2} \vec{a}$$

gegeben. Der Betrag $r_{\min} = |\vec{r}_{\min}|$ des kürzesten Abstandes der Geraden vom Koordinatenursprung ist dann

$$\begin{aligned} r_{\min}^2 &= \vec{r}_{\min} \cdot \vec{r}_{\min} = (\vec{r}_0 + \lambda \vec{a}) \cdot \vec{r}_{\min} \\ &= \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_{\min} = \vec{r}_0 \cdot \vec{r}_0 - \frac{1}{a^2} (\vec{r}_0 \cdot \vec{a})^2 \\ &= r_0^2 - \frac{1}{a^2} r_0^2 a^2 \cos^2 \theta = r_0^2 (1 - \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

und somit

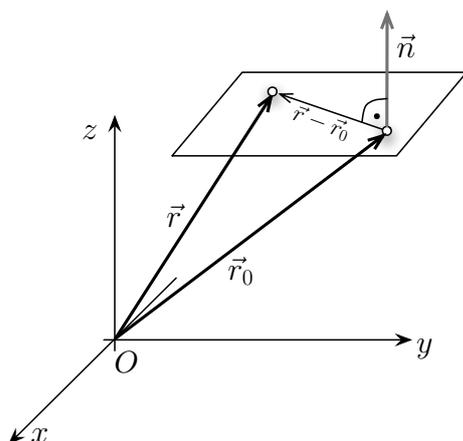
$$r_{\min} = r_0 \sin \theta .$$

Dieses Ergebnis können wir mit Hilfe des Vektorprodukts auch in der Form

$$r_{\min} = \left| \vec{r}_0 \times \frac{\vec{a}}{a} \right|$$

aufschreiben.

Bestimmung einer Ebene durch Punkt und Normalenvektor Verschieden Formen der Ebenengleichung gewinnen wir, indem wir mit Hilfe des Skalarproduktes formulieren, daß der Normalenvektor \vec{n} senkrecht auf dem Verbindungsvektor zweier Punkte steht, die in dieser Ebene liegen.



In Formeln:

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0 .$$

Explizit bedeutet das

$$n_1 x + n_2 y + n_3 z = c \quad \text{mit} \quad c = \vec{n} \cdot \vec{r}_0 = \text{const} .$$

Division durch c ergibt die *Achsenabschnittsgleichung* der Ebene

$$\boxed{\frac{n_1}{c} x + \frac{n_2}{c} y + \frac{n_3}{c} z = 1} .$$

Zum Beispiel ist der Abschnitt auf der x -Achse ($y = 0 = z$) $x = \frac{c}{n_1}$.

\vec{n} : Normalenvektor

$\vec{r} - \vec{r}_0$: Vektor in der Ebene

Eine Änderung der Konstanten c bedeutet bei unverändertem Normalenvektor, daß sich alle Achsenabschnitte um den gleichen Faktor ändern. Es entstehen zueinander parallelverschobene Ebenen.

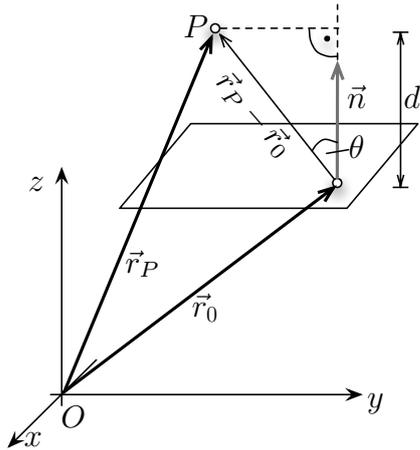
Beispiel aus der Physik

Bei *ebenen* (ebenfrontigen) *Wellen* treten Funktionen mit dem Argument $(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$ auf. Dabei tritt an die Stelle des Normalenvektors \vec{n} der Wellen(zahl)vektor \vec{k} . Dieses Argument nennen wir die *Phase* einer Welle. Wir wollen fragen, welche Gestalt die Flächen konstanter Phase haben. Also: Was bedeutet $\vec{k}\vec{r} - \omega t = C = \text{const}$? Zu einem bestimmten Zeitpunkt t_0 ist

$\vec{k}\vec{r} = C + \omega t_0 = C_0$. Das ist die Gleichung einer Ebene. Zu einem späteren Zeitpunkt $t_1 > t_0$ ist $\vec{k}\vec{r} = C + \omega t_1 = C_1 > C_0$. Das ist die Gleichung einer in \vec{k} -Richtung verschobenen, parallelen Ebene. So wird eine *auslaufende* ebene Welle beschrieben.

Mit dem Normalen-Einheitsvektor (Division durch $n = |\vec{n}| = \sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}$) erhalten wir aus der Achsenabschnittsgleichung die *Hessesche Normalform* der Ebenengleichung

$$\frac{n_1}{n}x + \frac{n_2}{n}y + \frac{n_3}{n}z = \frac{c}{n} \equiv p.$$



Um zu klären, welche Bedeutung die Größe

$$p = \frac{c}{n} = \frac{\vec{n}\vec{r}_0}{n} = \frac{\vec{n}}{n} \cdot \vec{r}_0$$

hat, betrachten wir den Abstand d eines Punktes P von der Ebene (\vec{r}_P : Ortsvektor von P)

$$d = |\vec{r}_P - \vec{r}_0| \cdot \cos \theta = \left| (\vec{r}_P - \vec{r}_0) \cdot \frac{\vec{n}}{n} \right|.$$

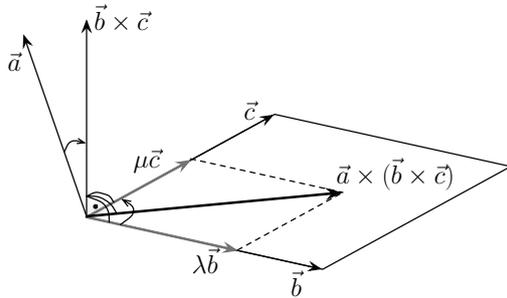
Für $\vec{r}_P = \vec{0}$ (P im Koordinatenursprung) stellen wir eine Übereinstimmung mit der Formel für p fest.

Resultat: Der Parameter p ist der Abstand der Ebene vom Koordinatenursprung.

3.5. Mehrfachprodukte von Vektoren

Das doppelte Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$: Wir zeigen, daß das doppelte Vektorprodukt auf Skalarprodukte zurückgeführt werden kann.

Nach Definition des Vektorprodukts gilt für



$$\vec{v} \equiv \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) :$$

- $\vec{v} \perp (\vec{b} \times \vec{c})$, also liegt \vec{v} in der von \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Ebene. In Formeln:

$$\vec{v} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} .$$

- $\vec{v} \perp \vec{a}$ also $\vec{a} \cdot \vec{v} = 0$ und damit

$$\lambda \cdot \vec{a} \cdot \vec{b} + \mu \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 .$$

Diese Gleichung ist erfüllt, wenn wir

$$\lambda = \kappa \cdot \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{und} \quad \mu = -\kappa \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$$

wählen, worin κ ein gemeinsamer konstanter Faktor ist. Mit diesen Koeffizienten λ und μ wird

$$\vec{v} = \kappa [(\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}] .$$

- Bestimmung von κ :

Da κ ein konstanter Faktor ist, genügt es, eine Komponente des Vektors \vec{v} zu betrachten. Wir wählen v_1 und erhalten aus der ursprünglichen Definition des Vektors \vec{v}

$$\begin{aligned} v_1 &= a_2 (\vec{b} \times \vec{c})_3 - a_3 (\vec{b} \times \vec{c})_2 \\ &= a_2 (b_1 c_2 - b_2 c_1) - a_3 (b_3 c_1 - b_1 c_3) \\ &= a_2 b_1 c_2 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3 . \end{aligned}$$

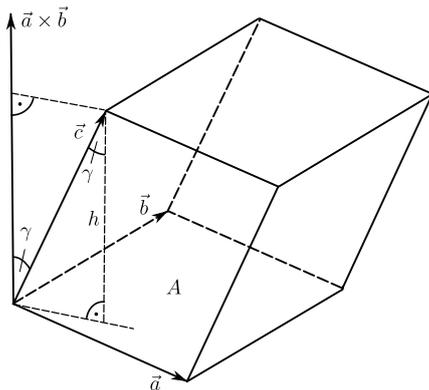
Der Ausdruck für \vec{v} , der κ enthält, ist in ausgeschriebener Form

$$\begin{aligned} v_1 &= \kappa [(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) b_1 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) c_1] \\ &= \kappa (a_2 b_1 c_2 + a_3 b_1 c_3 - a_2 b_2 c_1 - a_3 b_3 c_1) . \end{aligned}$$

Der Vergleich ergibt $\kappa = 1$, und wir erhalten als Resultat den *Entwicklungssatz* für das doppelte Vektorprodukt

$$\boxed{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}} .$$

Das Spatprodukt $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$: Die Vektoren \vec{a} und \vec{b} spannen ein Parallelogramm auf, dessen Fläche $A = |\vec{a} \times \vec{b}|$ ist. Nehmen wir den nicht in der Ebene dieses Parallelogramms liegenden Vektor \vec{c} hinzu, entsteht ein Parallelepiped oder Spat.



Nun ist

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = c \cdot |\vec{a} \times \vec{b}| \cdot \cos \gamma = c \cdot A \cdot \cos \gamma,$$

und $c \cdot \cos \gamma = h$ ist die Höhe des Spats. Damit ist schließlich $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = A \cdot h = V$ das Spatvolumen.

Hätten wir die von den Vektoren \vec{a} und \vec{c} sowie \vec{b} und \vec{c} aufgespannten Flächen als „Grund“-Flächen angesehen, wären wir natürlich zu dem gleichen Spatvolumen gelangt. Es gilt also

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}),$$

wobei es auf die Reihenfolge der Faktoren in den Vektorprodukten ankommt. Man sagt, daß die drei Ausdrücke durch *zyklische Vertauschung* der Faktoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ auseinander hervorgehen. Außerdem führt auch die Vertauschung von „ \cdot “ und „ \times “ in einem der Ausdrücke auf einen anderen Ausdruck, der in dieser Zeile vorkommt, wenn die Klammern stets um das neu entstehende Vektorprodukt gesetzt werden.

3.6. Vektoren und Drehungen des Koordinatensystems

Nun kommen wir zum Verhalten von Vektoren und zur Invarianz des Skalarprodukts bei Drehungen des Koordinatensystems um einen festen Winkel φ entgegen dem Uhrzeigersinn.

a) 1. Schritt: Zunächst stellen wir die Basisvektoren \vec{i}' und \vec{j}' durch \vec{i} und \vec{j} dar.

Da die Drehung in der (x, y) -Ebene stattfinden soll, machen wir den Ansatz

$$\vec{i}' = a\vec{i} + b\vec{j}.$$

Das „Umstellen“ dieser Zeile nach den Koeffizienten a und b erfolgt mittels der Multiplikationstabelle für das Skalarprodukt und ergibt

$$a = \vec{i}' \cdot \vec{i} = \cos \varphi,$$

$$b = \vec{i}' \cdot \vec{j} = \cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) = \sin \varphi.$$

Entsprechend folgen aus dem Ansatz

$$\vec{j}' = c\vec{i} + d\vec{j}$$

die Koeffizienten

$$c = \vec{j}' \cdot \vec{i} = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) = -\sin \varphi,$$

$$d = \vec{j}' \cdot \vec{j} = \cos \varphi.$$

Die Drehung wird also durch

$$\begin{aligned}\vec{i}' &= \cos \varphi \cdot \vec{i} + \sin \varphi \cdot \vec{j} \\ \vec{j}' &= -\sin \varphi \cdot \vec{i} + \cos \varphi \cdot \vec{j}\end{aligned}$$

beschrieben.

b) 2. Schritt: Wir zerlegen den Vektor \vec{A} nun in beiden Koordinatensystemen,

$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} = A'_x \vec{i}' + A'_y \vec{j}'$$

und lösen mit Hilfe der Multiplikationstabelle nach den gestrichenen Vektorkoordinaten auf:

$$\begin{aligned}A'_x &= A_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{i}' + A_y \cdot \vec{j} \cdot \vec{i}' = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \\ A'_y &= A_x \cdot \vec{i} \cdot \vec{j}' + A_y \cdot \vec{j} \cdot \vec{j}' = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi.\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass sich die Komponenten des Vektors \vec{A} bei Drehung des Koordinatensystems wie die Basisvektoren transformieren. Dies ist eine *definierende Eigenschaft* von Vektoren.

Vektorkomponenten transformieren sich bei einer Drehung des Koordinatensystems wie die Basisvektoren.

Um die *Umkehrtransformation* anzugeben, liegt es nahe, die voranstehenden Transformationsformeln als Gleichungssystem für die beiden Unbekannten A_x und A_y aufzufassen (Übungsaufgabe). Schneller kommen wir zum Ziel, wenn wir die gestrichenen und ungestrichenen Größen vertauschen und gleichzeitig φ durch $-\varphi$ ersetzen. Das Resultat ist

$$\begin{aligned}A_x &= A'_x \cos \varphi - A'_y \sin \varphi \\ A_y &= A'_x \sin \varphi + A'_y \cos \varphi.\end{aligned}$$

Anhand der geometrischen Verhältnisse der Abbildung können wir uns überzeugen, daß der Ortsvektor $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$ dieses Kriterium erfüllt (Übungsaufgabe). Es gilt also

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi \\ y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}$$

Beispiele Zwei weitere Beispiele sollen diese Vektordefinition illustrieren.

a) Es sei $A_x = -y$ und $A_y = x$.

Falls es sich bei A_x um eine Vektorkomponente handelt, muß bei Drehung des Koordinatensystems

$$\begin{aligned}A'_x &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \\ &= -y \cos \varphi + x \sin \varphi\end{aligned}$$

gelten. Wir überprüfen dies mit Hilfe der Transformationsformel für y ,

$$A'_x = -y' = -(-x \sin \varphi + y \cos \varphi) = x \sin \varphi - y \cos \varphi$$

und stellen Übereinstimmung fest.

Für A_y muß gelten

$$\begin{aligned} A'_y &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \\ &= y \sin \varphi + x \cos \varphi, \end{aligned}$$

und tatsächlich ist mit der Transformationsformel für x

$$A'_y = x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

Wiederum besteht Übereinstimmung. Das Kriterium für das Verhalten von Vektoren bei Drehungen des Koordinatensystems ist erfüllt.

b) Es sei $A_x = y$ und $A_y = x$.

Falls es sich bei A_x um eine Vektorkomponente handelt, muß bei Drehung des Koordinatensystems

$$\begin{aligned} A'_x &= A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \\ &= y \cos \varphi + x \sin \varphi \end{aligned}$$

gelten. Wir überprüfen dies mit Hilfe der Transformationsformel für y ,

$$A'_x = y' = -x \sin \varphi + y \cos \varphi$$

und stellen keine Übereinstimmung fest.

Für A_y muß gelten

$$\begin{aligned} A'_y &= -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \\ &= -y \sin \varphi + x \cos \varphi, \end{aligned}$$

mit der Transformationsformel für x ist aber

$$A'_y = x' = x \cos \varphi + y \sin \varphi.$$

Wiederum besteht keine Übereinstimmung. Das Kriterium für das Verhalten von Vektoren bei Drehungen des Koordinatensystems ist hier *nicht* erfüllt. Also sind A_x und A_y keine Vektorkomponenten.

Betrag von \vec{A}

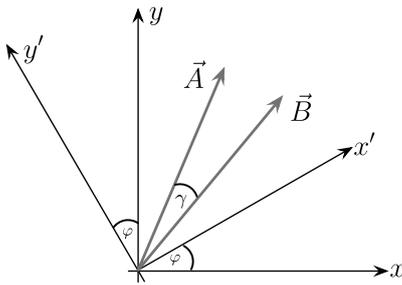
$$\begin{aligned} |\vec{A}|^2 &= A'^2_x + A'^2_y = (A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi)^2 + (-A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi)^2 \\ &= A_x^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + A_y^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\ &= A_x^2 + A_y^2 \end{aligned}$$

Resultat:

$$A'^2_x + A'^2_y = A_x^2 + A_y^2.$$

Unserer Erwartung entsprechend, ist der *Betrag* (die Länge) des Vektors nicht von der Wahl des Koordinatensystems abhängig und ändert sich auch bei dessen Drehung nicht. Man sagt: Der Betrag eines Vektors ist *invariant* gegenüber Drehungen des Koordinatensystems.

Skalarprodukt zweier Vektoren \vec{A} und \vec{B}



$$\begin{aligned}
 & A'_x B'_x + A'_y B'_y \\
 &= (A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi) \cdot (B_x \cos \varphi + B_y \sin \varphi) \\
 &\quad + (-A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi) \\
 &\quad \cdot (-B_x \sin \varphi + B_y \cos \varphi) \\
 &= A_x B_x (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\
 &\quad + A_y B_y (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \\
 &\quad + A_x B_y (\cancel{\cos \varphi \sin \varphi} - \cancel{\sin \varphi \cos \varphi}) \\
 &\quad + A_y B_x (\cancel{\sin \varphi \cos \varphi} - \cancel{\cos \varphi \sin \varphi})
 \end{aligned}$$

Bei Anwendung des „trigonometrischen Pythagoras“ auf die verbleibenden Terme erhalten wir das Resultat

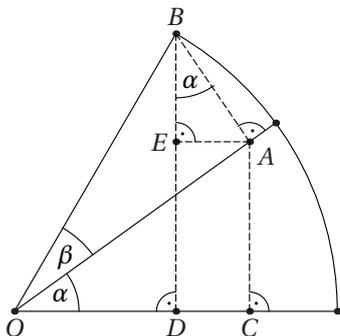
$$A'_x B'_x + A'_y B'_y = A_x B_x + A_y B_y.$$

Gegenüber Drehungen des Koordinatensystems ist das Skalarprodukt invariant. Nun ist auch $\vec{A} \cdot \vec{B} = AB \cos \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$. Da wir bereits wissen, daß die Beträge $A = |\vec{A}|$ und $B = |\vec{B}|$ invariant sind, folgt somit die Invarianz des Winkels $\gamma = \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$ zwischen zwei Vektoren. Dies entspricht ebenfalls unserer Erwartung. Die *Invarianz des Skalarproduktes* bei Drehungen ist dessen wichtigste Eigenschaft.

3.7. Zusätzlicher Inhalt: Additionstheoreme von Winkelfunktionen

Wir haben bereits Additionstheoreme benutzt, die besagen, wie wir den Sinus oder Cosinus der Summe oder Differenz zweier Winkel durch die Sinus und Cosinus der einzelnen Summanden ausdrücken können. Diese Theoreme leiten wir nun her. Aus ihnen folgen weitere nützliche Formeln, die wir später aber meist Formelsammlungen entnehmen.

Elementar-geometrische Herleitung Wir leiten das Additionstheorem für $\sin(\alpha + \beta)$ zuerst elementar-geometrisch her.⁴



Nach Konstruktion ist

$$\begin{aligned}
 \overline{ED} &= \overline{AC} \quad \text{und} \\
 \sphericalangle EBA &= \alpha, \quad \text{da } \overline{BD} \perp \overline{OD} \quad \text{und } \overline{BA} \perp \overline{OA}.
 \end{aligned}$$

In dem Dreieck $\triangle OBD$ lesen wir ab:

⁴Um das Formelbild übersichtlich zu halten, bezeichnen wir mit \overline{AB} sowohl die Strecke, die die Punkte A und B verbindet, als auch deren Länge. Bei gerichteten Strecken müssen wir aber zwischen dem Vektor \vec{AB} und seiner Länge $|\vec{AB}| = \overline{AB}$ unterscheiden.

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{BD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BE} + \overline{ED}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BE} + \overline{AC}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{BE}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{OB}} \\ &= \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}} \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} + \frac{\overline{AC}}{\overline{OA}} \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} = \underbrace{\cos \alpha}_{\triangle BEA} \cdot \underbrace{\sin \beta}_{\triangle OAB} + \underbrace{\sin \alpha}_{\triangle OAC} \cdot \underbrace{\cos \beta}_{\triangle OAB} \end{aligned}$$

Resultat:

$$\boxed{\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta}.$$

Daraus folgt mit $\beta \rightarrow -\beta$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \underbrace{\cos(-\beta)}_{\cos \beta} + \cos \alpha \underbrace{\sin(-\beta)}_{-\sin \beta} = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta.$$

Auf die gleiche Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \frac{\overline{OD}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC} - \overline{EA}}{\overline{OB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{OB}} - \frac{\overline{EA}}{\overline{OB}} \\ &= \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} \frac{\overline{OA}}{\overline{OB}} - \frac{\overline{EA}}{\overline{AB}} \frac{\overline{AB}}{\overline{OB}} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

und mit $\beta \rightarrow -\beta$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos(-\beta) - \sin \alpha \sin(-\beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

Herleitung mit der Eulerschen Formel Sehr viel schneller gelingt die Herleitung mit Hilfe der Eulerschen Formel. Es ist

$$e^{i(\alpha+\beta)} = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

und andererseits

$$\begin{aligned} e^{i(\alpha+\beta)} &= e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} \\ &= (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta). \end{aligned}$$

Der Vergleich der Real- und Imaginärteile beider Ausdrücke ergibt unmittelbar die beiden Additionstheoreme

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta. \end{aligned}$$

Herleitung mit dem Skalarprodukt Es seien \vec{a} und \vec{b} zwei Vektoren, die der Einfachheit halber Einheitsvektoren sein sollen. Wenn wir ihre kartesischen Komponenten in Polarkoordinaten ausdrücken, ergibt sich ihre Komponenten-Zerlegung mit $r = 1$ zu

$$\vec{a} = \cos \alpha \cdot \vec{i} + \sin \alpha \cdot \vec{j} \quad \text{und} \quad \vec{b} = \cos \beta \cdot \vec{i} + \sin \beta \cdot \vec{j}.$$

Ihr Skalarprodukt ist also

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta .$$

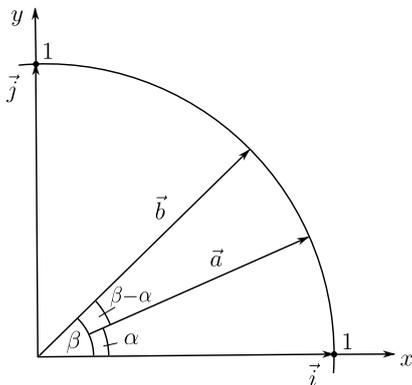
Nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\beta > \alpha$ an (siehe auch nachfolgende Abbildung), schließen beide Vektoren den Winkel $\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b}) = (\beta - \alpha)$ ein, und ihr Skalarprodukt ist auch

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \cos(\beta - \alpha) .$$

Der Vergleich beider Ausdrücke ergibt unmittelbar das Cosinus-Additionstheorem.

Auf die gleiche Weise erhält man das Sinus-Additionstheorem aus einer Betrachtung des Vektorprodukts (Übungsaufgabe).

Zusammenhang mit den Drehungen des Koordinatensystems



Nun fassen wir den Vektor \vec{a} als Basisvektor \vec{i}' eines um den Winkel $\varphi = \alpha$ gedrehten Koordinatensystems auf. Dann sind die Komponentenzerlegungen des Vektors \vec{b} in beiden Koordinatensystemen (auch für \vec{b} ist $r = 1$)

$$\begin{aligned} \vec{b} &= \cos \beta \cdot \vec{i} + \sin \beta \cdot \vec{j} \\ &= \cos(\beta - \varphi) \cdot \vec{i}' + \sin(\beta - \varphi) \cdot \vec{j}' . \end{aligned}$$

Dies eingesetzt in die nun für den Vektor \vec{b} aufgeschriebenen Transformationsformeln bei Drehungen des Koordinatensystems,

$$\begin{aligned} b'_x &= b_x \cos \varphi + b_y \sin \varphi \\ b'_y &= -b_x \sin \varphi + b_y \cos \varphi , \end{aligned}$$

ergibt erneut die Additionstheoreme für die sin- und die cos-Funktion.

4. Kegelschnitte

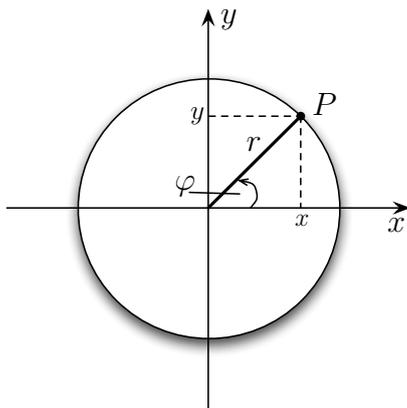
Kegelschnitte sind in der Physik beispielsweise beim Kepler-Problem (Planetenbewegung oder Bohr-Sommerfeldsches Atommodell), bei Streuvorgängen, Parabolspiegeln oder der Polarisation des Lichtes von Bedeutung.

Wir geben nachfolgend für jeden Kegelschnitt eine Definition und übersetzen diese unter Verwendung von kartesischen und Polarkoordinaten in Formeln. Den Nachweis, daß sich diese Figuren ergeben, wenn man einen geraden Kreiskegel unter verschiedenen Winkeln mit einer Ebene schneidet, weshalb sie Kegelschnitte heißen, bringen wir im Zusatzmaterial zum Repetitorium Mathematische Methoden.

4.1. Wiederholung: Der Kreis

Der Kreis ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, die von *einem* Punkt den gleichen Abstand haben.

Dieser eine Punkt heißt *Mittelpunkt* und gehört definitionsgemäß dem Kreis nicht an.



Aus der Abbildung lesen wir die *Mittelpunktsgleichung*

$$x^2 + y^2 = r^2 = \text{const}$$

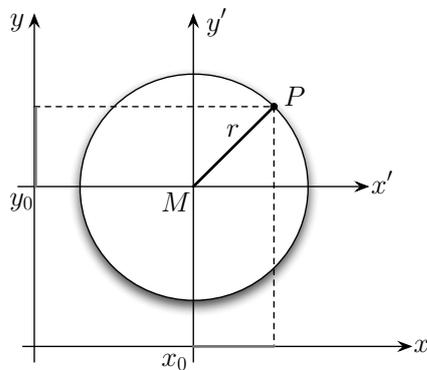
des Kreises ab. Darin ist der Radius r des Kreises eine von zwei Polarkoordinaten. Die *Polargleichung* des Kreises ist dann

$$r = \text{const}.$$

Diese ist besonders einfach, da φ nicht vorkommt, weil r für alle Winkel φ gleich ist.

Kreis nicht in Mittelpunktslage

Wenn der Mittelpunkt M des Kreises nicht mit dem Ursprung des (x, y) -Koordinatensystems zusammenfällt, führen wir ein achsenparalleles (x', y') -Koordinatensystem mit M als Ursprung ein.



Die Mittelpunktsgleichung im (x', y') -System ist

$$x'^2 + y'^2 = r^2,$$

und mit dem Zusammenhang

$$x' = x - x_0$$

$$y' = y - y_0$$

der Koordinatensysteme erhalten wir die Gleichung

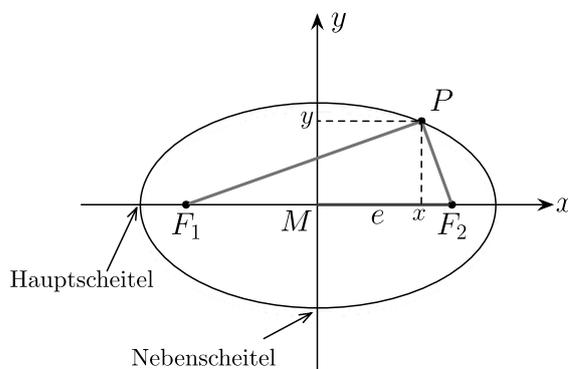
$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

des verschobenen Kreises.

4.2. Die Ellipse

Die Ellipse ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für die die *Summe* der Abstände von *zwei* festen Punkten konstant ist.

Diese Punkte heißen *Brennpunkte* (F_1, F_2) , deren Formelsymbol F von „focus“ herrührt.



Nach dieser Definition ist

$$\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a \quad \text{mit} \quad 2a > 2e.$$

Daraus ergibt sich die *Faden-* oder *Gärtnerkonstruktion* der Ellipse: Wir fixieren zwei Reißnägeln im Abstand $2e$ auf einer Tischplatte, befestigen an ihnen die Enden eines Fadens der Länge $2a > 2e$ und umfahren diese mit einem Bleistift so, daß er den Faden dauernd straffhält.

Aus der Ellipse entsteht ein Kreis, wenn F_1 und F_2 in den Mittelpunkt rücken. Umgekehrt geht die Ellipse aus dem Kreis hervor, wenn die Brennpunkte aus dem Mittelpunkt wegrücken („ex centro“).

Den Abstand $e = \overline{MF_1} = \overline{MF_2}$ bezeichnen wir als *lineare Exzentrizität*, die demnach die Dimension einer Länge hat. Die Koordinaten der Brennpunkte sind $F_1 = (-e, 0)$ und $F_2 = (e, 0)$. Ein anschauliches Beispiel zur Illustration des Begriffs „Brennpunkt“ sind sogenannte Flüsterkammern. Wenn im Brennpunkt F_1 eines Zimmers mit elliptischer Berandung sehr leise gesprochen wird und dies schon in der näheren Nachbarschaft von F_1 nicht mehr zu hören ist, kann man die Worte in dem weiter entfernten Brennpunkt F_2 deutlich wahrnehmen.

Aus der Abbildung lesen wir

$$\begin{aligned}\sqrt{(e+x)^2 + y^2} + \sqrt{(e-x)^2 + y^2} &= 2a \\ \sqrt{(e+x)^2 + y^2} &= 2a - \sqrt{(e-x)^2 + y^2}\end{aligned}$$

ab. Daraus wird durch Quadrieren

$$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2 + y^2}$$

und durch nochmaliges Quadrieren

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Wir betrachten nun *spezielle Punkte der Ellipse*:

- Für die Hauptscheitelpunkte bei $y = 0$ ist $|x| = a$ mit a als der *großen Halbachse*.
- Für die Nebenscheitelpunkte bei $x = 0$ ist $|y| = \sqrt{a^2 - e^2} = b$ mit b als der *kleinen Halbachse*.

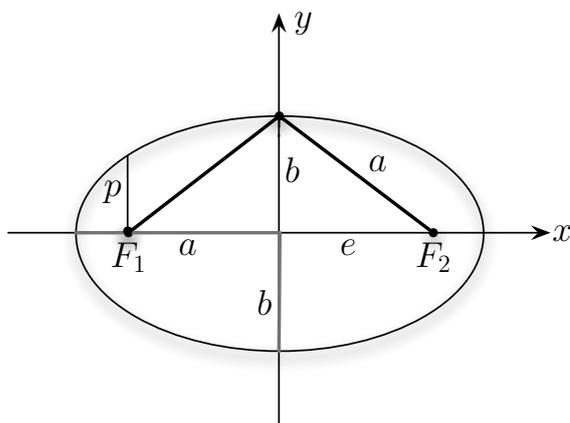
Ist der Punkt P ein Nebenscheitelpunkt, gilt für ihn nach Definition der Ellipse $\overline{F_1P} = \overline{F_2P} = a$. Es ist also $a^2 = b^2 + e^2$ und $a > b$ (siehe nachfolgende Abbildung). Damit wird die vorstehende Gleichung zu

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

und nach Division durch a^2b^2 erhalten wir schließlich die *Mittelpunktsgleichung der Ellipse*

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}.$$

Weitere Größen zur Charakterisierung der Ellipse sind:



- die *numerische Exzentrizität*

$$\varepsilon = \frac{e}{a} < 1 \quad (\text{da } e < a),$$

eine dimensionslose Größe,

- der *Ellipsenparameter*

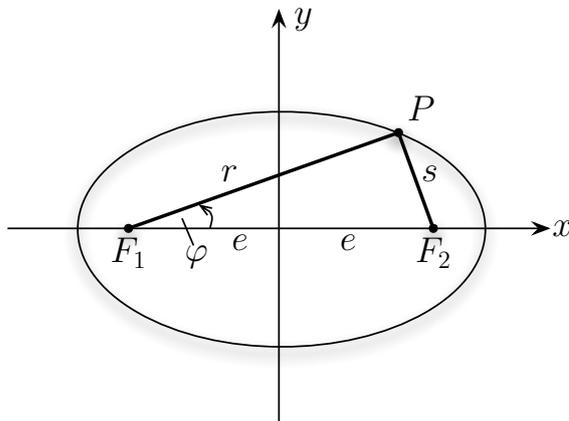
$$p = |y(\pm e)|,$$

die Ordinate der Brennpunkte bei $x = \pm e$, manchmal auch Halb-Parameter genannt.

Aus der Mittelpunktsgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}a^2p^2 &= a^2b^2 - b^2e^2 \\ &= b^2(a^2 - e^2) = b^4 \\ p &= \frac{b^2}{a}.\end{aligned}$$

Zur Polargleichung der Ellipse Wir stellen die Ellipse nun in einem neuen Koordinatensystem dar, das sich von dem bisher verwendeten kartesischen Koordinatensystem mit seinem Ursprung im Mittelpunkt der Ellipse in zweierlei Hinsicht unterscheidet. Erstens liegt der Koordinatenursprung in einem der Brennpunkte, hier F_1 . Zweitens sind die neuen Koordinaten die Polarkoordinaten r und φ . Daher heißt der neue Koordinatenursprung auch „Pol“ und die x -Achse des alten Koordinatensystems „Polarachse“. Anstatt die Mittelpunktsgleichung der Ellipse in diese Koordinaten formal umzurechnen,¹ benutzen wir elementare Geometrie.



In dem Dreieck $\triangle F_1PF_2$ ist

r : der „Leitstrahl“ (auch „Fahrstrahl“)

s : eine Hilfsgröße.

Nach Definition der Ellipse ist

$$r + s = 2a$$

$$s = 2a - r.$$

Der Cosinussatz im Dreieck $\triangle F_1PF_2$ ergibt

$$s^2 = r^2 + (2e)^2 - 2 \cdot r \cdot (2e) \cdot \cos \varphi.$$

Mit $s = 2a - r$ wird

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4e^2 - 4re \cos \varphi$$

$$a^2 - e^2 = r(a - e \cos \varphi)$$

$$b^2 = ra \left(1 - \frac{e}{a} \cos \varphi\right).$$

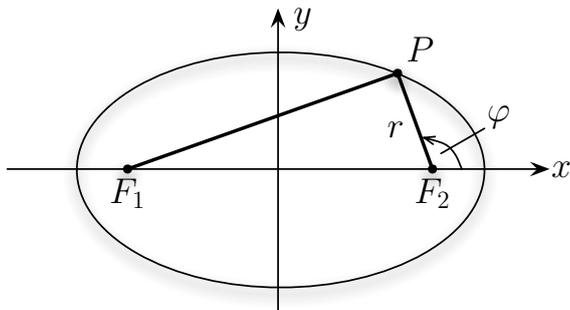
Mit $p = \frac{b^2}{a}$ und $\varepsilon = \frac{e}{a}$ entsteht daraus die *Polargleichung der Ellipse*

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

¹Diese Umrechnung führen wir im übernächsten Abschnitt am Beispiel der Scheitelfgleichung der Parabel vor.

Diskussion:

- Wegen $\varepsilon < 1$ und $\cos \varphi \leq 1$ kann der Nenner nicht verschwinden. Zu jedem Wert φ existiert ein (endlicher) Wert r ; die Ellipse ist eine geschlossene Figur.
- Es ist $p = r \left(\frac{\pi}{2} \right)$.
- Spezialfall Kreis ($e = 0$): $\varepsilon = 0$, $a = b = r = \text{const} = p$.
- Mit F_2 als Pol ist φ ein Außenwinkel. Die Polargleichung ist dann (Übungsaufgabe)

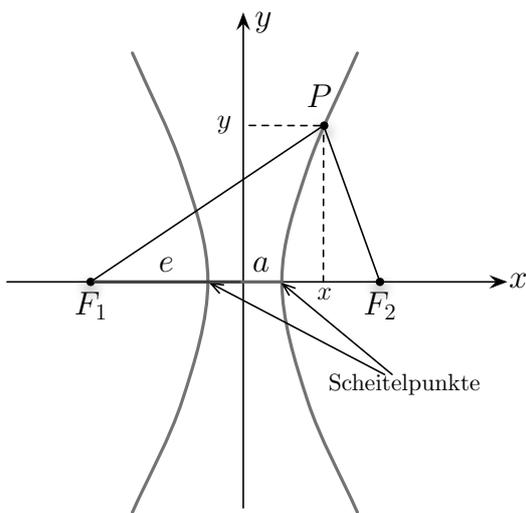


$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

4.3. Die Hyperbel

Die Hyperbel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für die die *Differenz* der Abstände von *zwei* festen Punkten konstant ist.

Diese Punkte heißen Brennpunkte. Nach dieser Definition ist $\overline{F_1P} - \overline{F_2P} = \pm 2a$, ($a > 0$). Jetzt gilt aber für die vom Mittelpunkt (Koordinatenursprung) bis zu den Brennpunkten gemessene lineare Exzentrizität $e > a$.



Wir lesen ab:

$$\sqrt{(e+x)^2 + y^2} - \sqrt{(x-e)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Nach einer Nebenrechnung wie bei der Ellipse wird

$$(a^2 - e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - e^2).$$

Wir wählen *spezielle Punkte*:

- $y = 0$ ergibt die Scheitelpunkte bei $|x| = a$ mit a als Scheitelabstand oder *transversaler Achse*.
- $x = 0$ ergibt formal $|y| = \sqrt{a^2 - e^2}$. Mit der Definition $b^2 = e^2 - a^2 > 0$ wird $|y| = ib$. Die Größe b heißt *imaginäre* oder *konjugierte Achse*. (Aber: Kein Punkt auf den Hyperbelästen hat die Koordinate $x = 0$.)

Damit haben wir

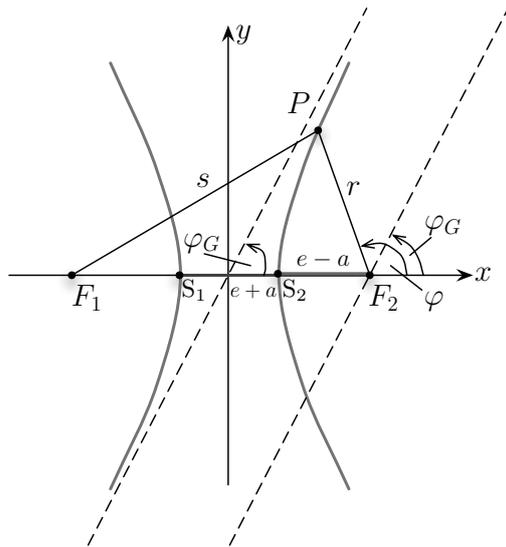
$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

und erhalten nach Division durch $(-a^2b^2)$ die *Mittelpunktsleichung der Hyperbel*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Im Fall $a = b$ heißt die Hyperbel *gleichseitig*.

Zur Polargleichung der Hyperbel Wieder verschieben wir den Ursprung des Koordinatensystems und bezeichnen den neuen Ursprung als Pol. Dieser Pol befindet sich in einem der Brennpunkte, hier in F_2 . Für die Größen ε und p gelten die gleichen Definitionen wie bei der Ellipse.



$$\overline{F_2 S_1} = e + a, \quad \overline{F_2 S_2} = e - a$$

Nach Definition der Hyperbel ist

$$\begin{aligned} r - s &= -2a, \text{ da } r < s \\ s &= r + 2a. \end{aligned}$$

Der Cosinussatz im Dreieck $\triangle F_1 P F_2$ ergibt

$$s^2 = r^2 + (2e)^2 - 4re \cos(\pi - \varphi).$$

Zusammen:

$$\begin{aligned} ra + a^2 &= e^2 + re \cos \varphi \\ \underbrace{a^2 - e^2}_{-b^2} &= -ra(1 - \varepsilon \cos \varphi) \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die *Polargleichung der Hyperbel*

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi}.$$

Diskussion

- Im Unterschied zur Ellipse ist wegen $e > a$

$$\varepsilon = \frac{e}{a} > 1.$$

Folglich gibt es einen *Grenzwinkel* φ_G , für den der Nenner Null wird und für den

$$\cos \varphi_G = \frac{1}{\varepsilon}$$

gilt. Also gibt es nicht zu jedem Winkel φ endliche Werte von r . Die Hyperbel ist keine geschlossene Figur.

- $\varphi = \pi, \cos \varphi = -1$: Nach der Polargleichung ist für diesen Fall

$$\begin{aligned} r &= \frac{p}{1 + \varepsilon} = \frac{b^2}{a \left(1 + \frac{e}{a}\right)} = \frac{b^2}{a + e} = \frac{b^2(a - e)}{(a + e)(a - e)} \\ &= \frac{b^2}{a^2 - e^2}(a - e) = -\frac{b^2}{b^2}(a - e) = e - a > 0. \end{aligned}$$

Das ist der Abstand des Scheitels S_2 vom Brennpunkt F_2 .

Allgemein gilt: Es ist $r > 0$ für $\cos \varphi < \frac{1}{\varepsilon}$, ($\varphi_G < \varphi < 2\pi - \varphi_G$, rechter Hyperbelast).

- $\varphi = 0, \cos \varphi = 1$: Nach analogen Umformungen wird

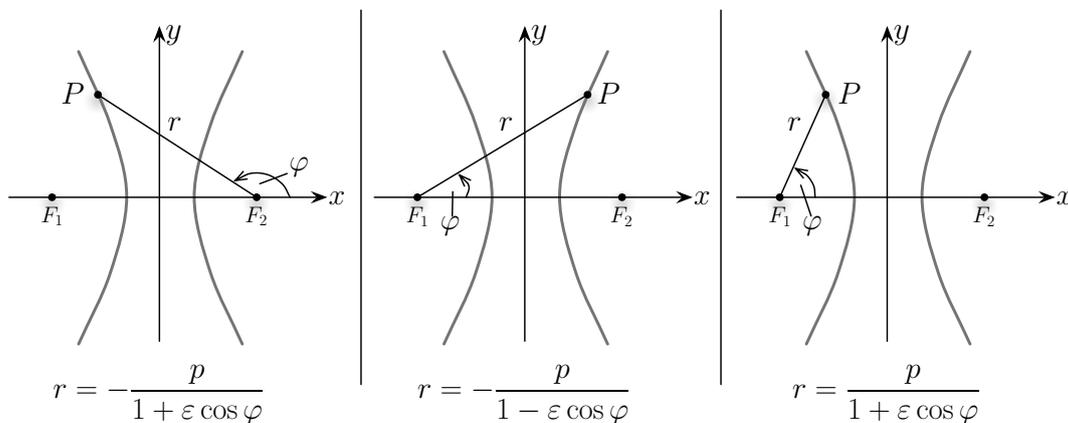
$$r = -(a + e) < 0.$$

Interpretation: Es ist $|r| = a + e$, d.i. der Abstand des Scheitels S_1 von F_2 .

Allgemein gilt: Es ist $r < 0$ für $\cos \varphi > \frac{1}{\varepsilon}$, ($-\varphi_G < \varphi < \varphi_G$, linker Hyperbelast).

Daraus leiten wir die Regel ab: Wenn $r < 0$ formal herauskommt, wird $|r|$ auf der *rückwärtigen Verlängerung* des zu φ gehörigen Strahls abgetragen.

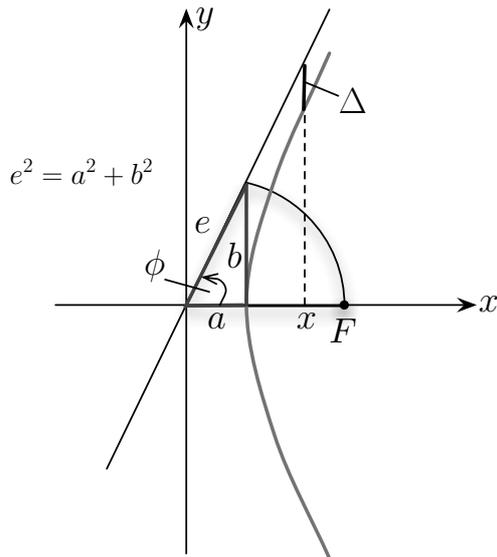
- Wenn wir zur Herleitung der Polargleichung den anderen Brennpunkt und/oder den anderen Hyperbelast auswählen, nimmt diese die folgenden Formen an:



Die Asymptoten der Hyperbel Aus der Mittelpunktsleichung folgt $y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$. Wir vergleichen dies mit den Geraden $y = \pm \frac{b}{a} x$ und betrachten dabei aus Symmetriegründen nur den ersten Quadranten. Die Differenz Δ zwischen der Geraden und dem Hyperbelast ist

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \frac{b}{a} x - \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \\ &= \frac{b}{a} \cdot \frac{a^2}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Resultat:



- Die Geraden $y = \pm \frac{b}{a}x$ durch den Ursprung (Mittelpunkt) sind Asymptoten der Hyperbel. Im Unendlichen haben sie keinen Abstand Δ von dieser.
- Der Anstieg der Asymptote (hier nur „+“) ist $\tan \phi = \frac{b}{a}$. Damit wird

$$\begin{aligned} \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} \\ &= \frac{a}{e} = \frac{1}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Also ist

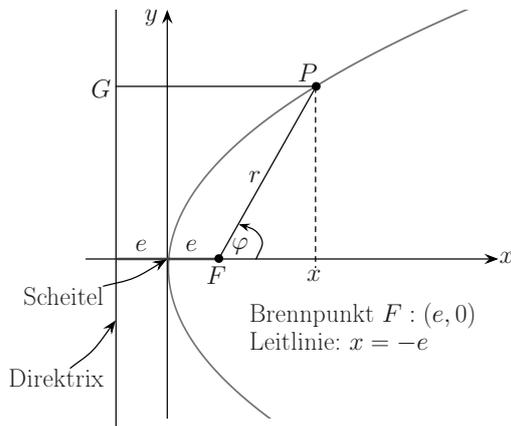
$$\phi = \varphi_G.$$

- Nun können wir auch der „imaginären Achse“ b eine anschauliche Bedeutung geben. Sie ist die Ordinate eines Scheitelpunktes der Hyperbel auf der Asymptote.

4.4. Die Parabel

Die Parabel ist der geometrische Ort aller Punkte der Ebene, für die die Abstände von einem Punkt und einer Linie gleich sind.

Der Punkt heißt *Brennpunkt*, die Linie *Direktrix* oder *Leitlinie*.



Nach Definition ist

$$\overline{PF} = \overline{PG},$$

sodaß wir aus der Abbildung

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - e)^2 + y^2} &= x + e \\ (x - e)^2 + y^2 &= (x + e)^2 \\ x^2 - 2ex + e^2 + y^2 &= x^2 + 2ex + e^2 \end{aligned}$$

ablesen können. Die verbleibende Gleichung

$$y^2 = 4ex$$

heißt *Scheitelfgleichung der Parabel*.

Mit dem Parabel-Parameter $p \equiv y(e) = 2e$ geht die Scheitelfgleichung in

$$y^2 = 2px$$

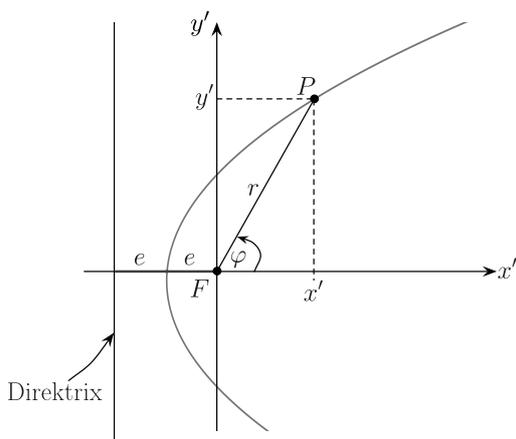
über.

Die Polargleichung der Parabel Um zur Polargleichung der Parabel zu gelangen, legen wir das Koordinatensystem so, daß sich der Pol im Brennpunkt F befindet. Wir machen also die Koordinatentransformation

$$\begin{aligned}x' &= x - e \\y' &= y\end{aligned}$$

und stellen nun x' und y' durch Polarkoordinaten dar,

$$\begin{aligned}x' &= r \cos \varphi \\y' &= r \sin \varphi.\end{aligned}$$



Damit wird die Scheitelgleichung zu

$$\begin{aligned}y'^2 &= 2p(x' + e) = 2p\left(x' + \frac{p}{2}\right) \\r^2 \sin^2 \varphi &= 2pr \cos \varphi + p^2 \\r^2 - 2p \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} r - \frac{p^2}{\sin^2 \varphi} &= 0.\end{aligned}$$

Das ist eine quadratische Gleichung für r mit der Lösung

$$r = \frac{p}{\sin^2 \varphi} (\cos \varphi \pm 1).$$

Beachten wir, daß nur die Lösung $r > 0$ relevant ist, können wir auch

$$r = \frac{p}{\sin^2 \varphi} (1 + \cos \varphi) = \frac{p(1 + \cos \varphi)}{1 - \cos^2 \varphi} = \frac{p(1 + \cancel{\cos \varphi})}{(1 + \cancel{\cos \varphi})(1 - \cos \varphi)}$$

schreiben. Wir erhalten als Resultat die *Polargleichung der Parabel*,

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \cos \varphi}},$$

die mit den Polargleichungen für Ellipse und Hyperbel übereinstimmt, wenn wir dort $\varepsilon = 1$ setzen.

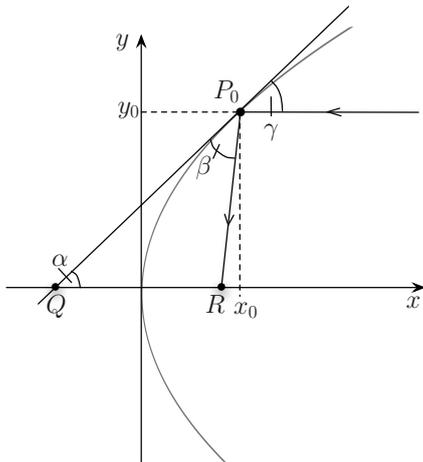
Damit können wir zusammenfassend die Polargleichungen aller Kegelschnitte in der Form

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos \varphi} \quad \text{mit} \quad \varepsilon = \begin{cases} = 0 & \text{Kreis} \\ < 1 & \text{Ellipse} \\ = 1 & \text{Parabel} \\ > 1 & \text{Hyperbel} \end{cases}$$

aufschreiben.

Die Brennpunkteigenschaft der Parabel Abschließend behandeln wir als Anwendungsbeispiel die Brennpunkteigenschaft der Parabel, die die Grundlage für die Konstruktion von Parabolspiegeln und Scheinwerfern ist.

Schneidet man einen Parabolspiegel mit einer Ebene, die Scheitel- und Brennpunkt enthält, entsteht als Schnittfigur eine Parabel. Wir stellen uns vor, daß Licht, „aus dem Unendlichen“ kommend, parallel zur Symmetrieachse der Parabel einfällt und diese im Punkt P_0 trifft. In einer kleinen Umgebung dieses Punktes ersetzen wir die Parabel durch ihre Tangente (den Parabolspiegel durch seine Tangentialebene), sodaß wir das bekannte Gesetz für die Reflexion an einem ebenen Spiegel anwenden können.



Dann ist

$$\beta = \gamma \quad (\text{Reflexionsgesetz}).$$

Die Tangente schneidet die x -Achse und den Lichtstrahl als Parallelen, also ist

$$\alpha = \gamma \quad (\text{Stufenwinkel})$$

und damit schließlich $\alpha = \beta$. Das Dreieck $\triangle QRP_0$ ist also *gleichschenkelig*,

$$\overline{QR} = \overline{RP_0}.$$

Zur Gleichung der Tangente an die Parabel $y^2 = 2px$ in P_0 :

- Anstieg m : Es ist $y' = \sqrt{2p} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{p}{2x}}$ und damit im Punkt P_0

$$m \equiv y'|_{x_0} = \sqrt{\frac{p}{2x_0}}.$$

- Zweipunktgleichung der Geraden, die P_0 und Q verbindet:

$$\begin{aligned} y_Q - y_0 &= m(x_Q - x_0) \quad \text{mit } y_Q = 0 \\ -\sqrt{2px_0} &= \sqrt{\frac{p}{2x_0}}(x_Q - x_0) \\ -2x_0 &= x_Q - x_0 \\ x_Q &= -x_0. \end{aligned}$$

Damit ist $\overline{QR} = |x_Q| + x_R = x_0 + x_R$. Andererseits können wir die Strecke $\overline{RP_0}$ nach dem Satz des Pythagoras berechnen,

$$\begin{aligned} \overline{RP_0} &= \sqrt{(x_0 - x_R)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 + x_R)^2 - 4x_0x_R + 2px_0} \\ &= \sqrt{(x_0 + x_R)^2 + 2x_0(p - 2x_R)}. \end{aligned}$$

Wir wissen außerdem bereits, daß $\overline{RP_0} = \overline{QR} = x_0 + x_R$ ist. Somit muß der zweite Summand im Radikanden des Wurzelausdrucks verschwinden, sodaß

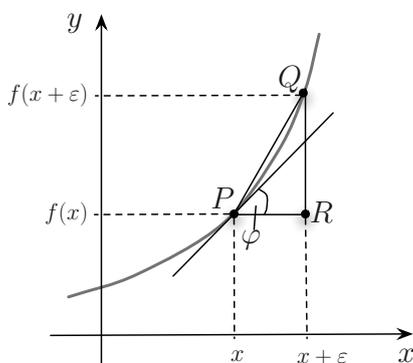
$$x_R = \frac{p}{2} = e$$

gilt. In Worten: Es ist $R \equiv F$ der Brennpunkt. Dieses Ergebnis ist unabhängig vom Punkt P_0 . *Alle* Parallelstrahlen werden in den Brennpunkt reflektiert. Für einen Kugelspiegel ist das nicht der Fall (Übungsaufgabe).

5. Differentialrechnung mit einer Variablen

In der Physik ist die Differentialrechnung ein unverzichtbarer Bestandteil, da sie dafür geeignet ist, Veränderungen zu beschreiben und da Naturgesetze üblicherweise in Form von Differentialgleichungen geschrieben werden. In der Geometrie nutzen wir die Differentialrechnung u.a. bei Extremwertaufgaben und Kurvendiskussionen.

5.1. Die Ableitung: Bezeichnungen, Definition und geometrische Bedeutung



Wir beginnen mit der Frage nach der Gleichung der Tangente an eine Funktion $f(x)$ im Punkt $P(x, y)$. Im Dreieck $\triangle PQR$ ist der Anstieg der Sekante durch

$$\frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{(x + \varepsilon) - x} = \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}$$

gegeben. Diesen bezeichnet man als *Differenzenquotient*. Die Tangente wollen wir nun als „Grenzlage“ der Sekante für $Q \rightarrow P$ ansehen.

Wir setzen hier stillschweigend voraus, daß wir nur Funktionen betrachten, die „glatt“ sind, sodaß dieser Grenzübergang überhaupt möglich ist.¹

Der Anstieg der Tangente ist

$$\tan \varphi = \lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (Q \rightarrow P)}} \frac{\overline{RQ}}{\overline{PR}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Diesen Anstieg nennen wir die *Ableitung* der Funktion $y = f(x)$ im Punkt P .

Bezeichnungen für die Ableitung Wir schreiben

$$y' = f'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon},$$

seltener auch $y' = f^{(1)}(x)$, um zu betonen, daß die *erste* Ableitung gemeint ist. Die erste Ableitung wird mit $\Delta y = f(x + \varepsilon) - f(x)$ und $\Delta x = \varepsilon$ auch als *Differentialquotient*

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

¹Die mit „glatt“ zusammengefassten Begriffe „Stetigkeit“ und „Differenzierbarkeit“ lassen sich in dem Weierstraßschen ε - δ -Formalismus streng fassen. Hier begnügen wir uns damit zu fordern, daß die von uns betrachteten Funktionen weder Sprung- noch Knickstellen haben.

geschrieben. Der Differentialquotient ist ein unteilbares Symbol für einen Grenzwert. Er wird „dy nach dx“ als Kurzform für „die Funktion $y = f(x)$ wird nach der Variablen x abgeleitet“ ausgesprochen und nicht etwa „dy dividiert durch dx“. Andere Schreibweisen sind $\frac{df(x)}{dx}$ oder $\frac{d}{dx}f(x)$. In der Physik wird oft die Bezeichnung

$$\frac{d}{dt}f(t) \equiv \dot{f}(t)$$

verwendet, wenn die Zeit t die unabhängige Variable ist. So ist beispielsweise der Vektor der Geschwindigkeit $\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t)$.²

Wenn wir nach dem Wert der Ableitung der Funktion $y = f(x)$ an der speziellen Stelle $x = x_0$ fragen, schreiben wir dafür

$$y'|_{x=x_0} = f'(x_0).$$

Das Symbol macht deutlich, daß zuerst die Ableitung zu bilden und *danach* der spezielle Wert $x = x_0$ einzusetzen ist.

Ein Beispiel aus der Physik soll noch einmal den Unterschied zwischen Differenzenquotient und Differentialquotient verdeutlichen. Dazu betrachten wir die Bahnkurve $x = x(t)$ der ein-dimensionalen Bewegung eines Massenpunktes. Dessen Durchschnittsgeschwindigkeit im Zeitintervall Δt ist

$$\bar{v} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

die Momentangeschwindigkeit ist jedoch

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.$$

Differenzen und Differentiale Stellen wir zuerst die *Gleichung der Tangente* im Punkt $P_0(x_0, y_0)$ mit Hilfe der Zweipunktgleichung der Geraden, $y - y_0 = m(x - x_0)$, auf. Mit

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} = \tan \varphi = f'(x_0)$$

wird

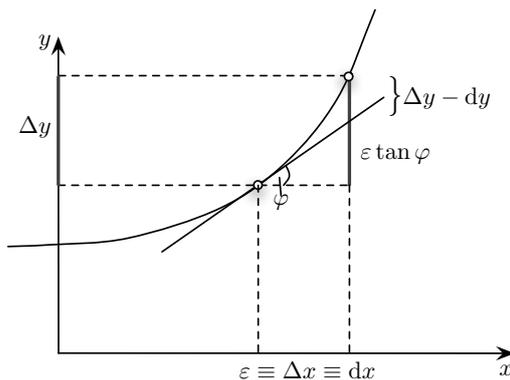
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0,$$

oder mit $\Delta x = x - x_0$ und $\Delta y = y - y_0$ auch

$$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Bisher haben wir den Differentialquotienten als ein Symbol für den Grenzwert eines Differenzenquotienten kennengelernt. Aber Differentiale haben auch eine eigenständige Bedeutung.

²Ist die Zeit eine von mehreren Variablen wie etwa bei der Beschreibung der Wellenausbreitung in Raum und Zeit, bezeichnet der Punkt als Ableitungssymbol die partielle Ableitung nach der Zeit (siehe Kapitel 6).



- Wir definieren für die *unabhängige Variable* das *Differential* $dx \equiv \Delta x \equiv \varepsilon$.
- Dann gibt es für die *abhängige Variable* einen Unterschied zwischen der Differenz

$$\Delta y = f(x + \varepsilon) - f(x)$$

der Ordinatenwerte *auf der Funktion* und dem *Differential* dy

$$dy = \varepsilon \cdot \tan \varphi = dx \cdot f'(x),$$

das die Differenz der entsprechenden Ordinatenwerte *auf der Tangente* ist.

Die Differentiale dx und dy sind also Abszissen- beziehungsweise Ordinatenintervalle mit Bezug auf die Tangente, die übrigens keineswegs „beliebig kleine“ oder „unendlich kleine“ Größen sein müssen. Mit dieser individuellen Bedeutung von dx und dy ist nun

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

tatsächlich der Quotient zweier Differentiale wie es der Name „Differentialquotient“ eigentlich auch nahelegt.

Für eine *lineare Funktion*, die mit ihrer Tangente übereinstimmt, entfällt die Unterscheidung zwischen Differenzen und Differentialen, so daß wir deren Gleichung außer in der Form $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$ auch als $dy = f'(x_0) \cdot dx$ schreiben können.

Im allgemeinen besteht jedoch ein Unterschied ($\Delta f - df$), für den

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\varepsilon} = 0$$

gilt.

Ein einfaches **Beispiel** sei die Funktion $y = f(x) = x^2$ mit der Ableitung (siehe nächsten Abschnitt) $y' = 2x$. Dafür ist

$$\begin{aligned} \Delta f &= (x + \varepsilon)^2 - x^2 = x^{\cancel{2}} + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 - x^{\cancel{2}} = \varepsilon(2x + \varepsilon), \\ df &= f'(x) dx = 2x \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

Allen diesen Begriffen und Definitionen wohnt keinerlei Näherung inne. Näherungen kommen erst ins Spiel, wenn wir die Funktion in einer gewissen Umgebung des Punktes P_0 durch ihre Tangente in diesem Punkt, also Δy durch dy , ersetzen. Dann sprechen wir von der *linearen Approximation* der Funktion in diesem Punkt. Diese ist umso besser, je kleiner die Differentiale sind. Je nach den Bedürfnissen der Aufgabe ist dieses Vorgehen machmal erlaubt.

3

³So haben wir beispielsweise bei der Herleitung der Brennpunkteigenschaft des Parabolspiegels diesen lokal durch einen ebenen Spiegel ersetzt.

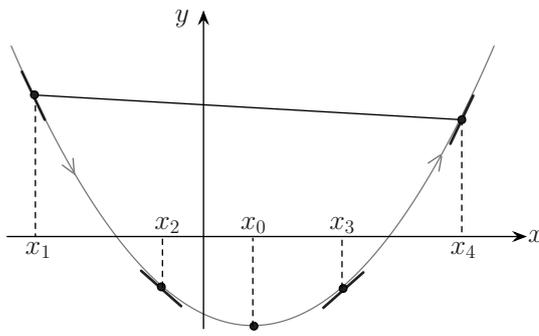
In einem physikalischen Kontext kann die Gleichung der Tangente auch die Antwort auf die Frage sein: Wie wirkt sich ein „Meßfehler“ Δx oder dx auf die gemäß $y = f(x)$ abhängige Größe y aus?

Zur Bedeutung der zweiten Ableitung Die zweite Ableitung beruht auf der Idee, die erste Ableitung wieder als Funktion von x aufzufassen, die abgeleitet werden kann. Sie wird durch die Symbole

$$y''(x) \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right)$$

beschrieben und „d zwei y nach dx Quadrat“ ausgesprochen, nicht etwa „d Quadrat...“. Der letzte dieser Formelausdrücke weist schon auf diese Bedeutung der zweiten Ableitung hin: Er beschreibt, wie sich der Anstieg der Tangente (die erste Ableitung) bei fortschreitendem x ändert.

Wir untersuchen diese Änderung zuerst in der Umgebung eines *Minimums* an der Stelle x_0 , wo die Tangente parallel zur x -Achse verläuft ($y'(x_0) = 0$) und zeigen, daß dort $y'' > 0$ gilt.



- Der Graph verläuft *unterhalb* der Verbindungslinie von zwei Punkten, die sich auf verschiedenen Seiten des Minimums befinden.
- Wenn wir dem Kurvenverlauf in Richtung auf zunehmende x -Werte hin folgen, durchfahren wir eine *Linkskurve*.
- Man sagt, die Kurve sei *konvex* zur x -Achse (oder *konkav* von oben).

$x < x_0$:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = -|x_1| \\ x_2 = -|x_2| \end{array} \right\} |x_1| > |x_2|$$

$x > x_0$:

$$x_4 > x_3$$

$y' < 0$:

$$\left. \begin{array}{l} y'_1 = -|y'_1| \\ y'_2 = -|y'_2| \end{array} \right\} |y'_1| > |y'_2|$$

$y' > 0$:

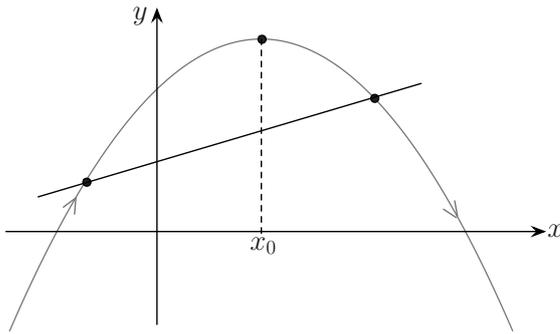
$$y'_4 > y'_3$$

Für das Vorzeichen der zweiten Ableitung genügt es, die Differenzenquotienten zu betrachten:

$$\frac{y'_2 - y'_1}{x_2 - x_1} = \frac{|y'_1| - |y'_2|}{|x_1| - |x_2|} > 0$$

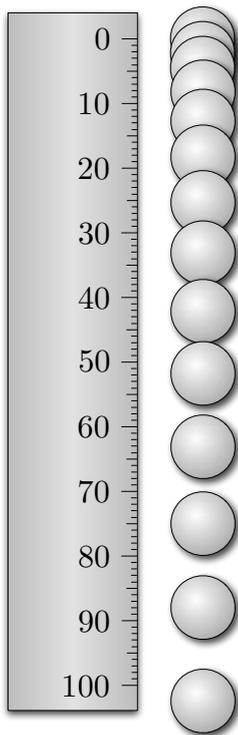
$$\frac{y'_4 - y'_3}{x_4 - x_3} > 0$$

Entsprechend gilt für das *Maximum*, wo die Tangente ebenfalls parallel zur x -Achse verläuft, $y'' < 0$ (Übungsaufgabe).



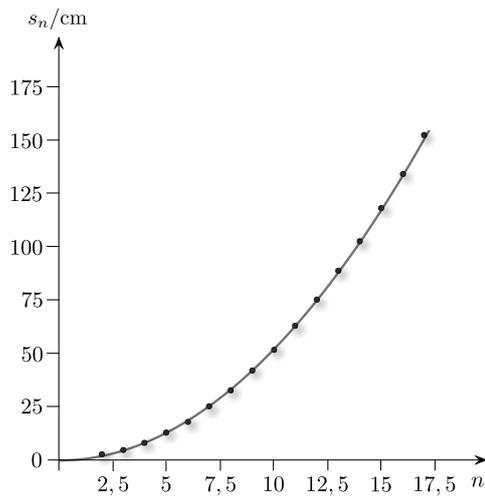
- Der Graph verläuft *oberhalb* der Verbindungsline von zwei Punkten, die sich auf verschiedenen Seiten des Maximums befinden.
- Wenn wir dem Kurvenverlauf in Richtung auf wachsende x -Werte hin folgen, durchfahren wir eine *Rechtskurve*.
- Man sagt, die Kurve sei *konkav* zur x -Achse (oder *konvex* von oben).

Erläuterung der Leibniz-Notation $\frac{d^2y}{dx^2}$: Wir behandeln als Beispiel aus der Physik den *freien Fall*. Die Abbildung zeigt eine frei fallende Kugel, die in zeitlichen Abständen $\Delta t = \frac{1}{30}$ s fotografiert wurde.



n	s_n/cm	$\Delta s_n/\text{cm}$	$\Delta(\Delta s_n)/\text{cm}$
0	0		
1	?	?	?
2	2,4	2,3	1,3
3	4,7	3,6	0,8
4	8,3	4,4	1,2
5	12,7	5,6	1,3
6	18,3	6,9	0,9
7	25,2	7,8	1,1
8	33,0	8,9	1,0
9	41,9	9,9	1,4
10	51,8	11,3	0,7
11	63,1	12,0	0,9
12	75,1	12,9	1,7
13	88,0	14,6	0,7
14	102,6	15,3	1,2
15	117,9	16,5	1,1
16	134,4	17,6	—
17	152,0	—	—

Durch eine ganze Zahl n lässt sich die Nummer jedes dieser Bilder angeben und damit auch die seit Beginn der Bewegung vergangene Zeit. Die zurückgelegten Fallwege, die Differenzen zwischen den Position zweier aufeinanderfolgender Aufnahmen (erste Differenzenfolge) und die Differenzen dieser Differenzen (zweite Differenzenfolge) haben wir tabellarisch und graphisch dargestellt.



Wir erkennen, daß im Rahmen der Ablesegenauigkeit die zweite Differenzenfolge, als Funktion von n betrachtet, eine von Null verschiedene Konstante ist. Nun zeigen wir, daß sich dies dann ergibt, wenn wir für die Fallwege selbst den in n quadratischen Ansatz

$$s_n = b(n \cdot \Delta t)^2, \quad b = \text{const}$$

machen.

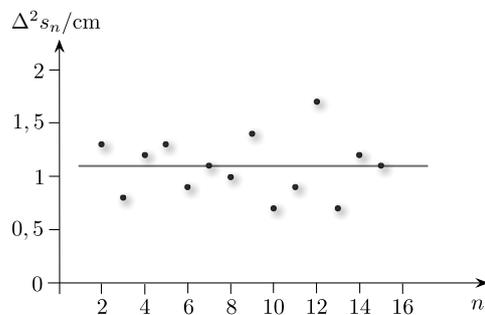
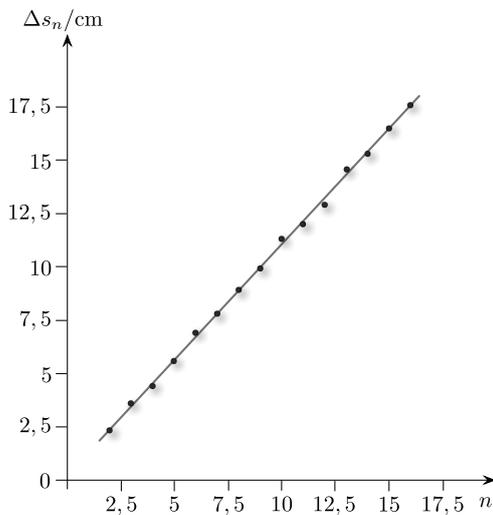
1. Differenzenfolge:

$$\begin{aligned} \Delta s_n &= s_{n+1} - s_n \\ &= b[(n+1)\Delta t]^2 - b(n \cdot \Delta t)^2 \\ &= b[\cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2}](\Delta t)^2 \\ \Delta s_n &= b \cdot (2n + 1)(\Delta t)^2, \quad \text{linear in } n \end{aligned}$$

2. Differenzenfolge:

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta s_n) &\equiv \Delta^2 s_n \\ &= \Delta s_{n+1} - \Delta s_n \\ &= s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n \\ &= b[(n+2)\Delta t]^2 - 2b[(n+1)\Delta t]^2 \\ &\quad + b(n \cdot \Delta t)^2 \\ &= b[\cancel{n^2} + 4n + 4 \\ &\quad - 2(\cancel{n^2} + 2n + 1) + \cancel{n^2}](\Delta t)^2 \\ \Delta(\Delta s_n) &= 2b(\Delta t)^2 = \text{const.} \end{aligned}$$

Dieses aufgrund der Beobachtungen angestrebte Ergebnis ist nur mit diesem quadratischen Ansatz erreichbar.



Wir fragen noch nach der Bedeutung der Konstante $2b$ in unserem Beispiel. Mit $\Delta t = \frac{1}{30}$ s und $\Delta(\Delta s_n) \approx 1,1$ cm ergibt sich $2b = 990 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-2}$, also (im Rahmen der Ablesegenauigkeit) die Schwerebeschleunigung nahe der Erdoberfläche. Mit $(\Delta t)^2$ aus dem Ansatz und der naheliegenden Bezeichnung $\Delta^2 s_n$ für $\Delta(\Delta s_n)$ wird nun auch die Leibniz-Notation

$$\frac{\Delta^2 s_n}{(\Delta t)^2} = 2b \quad \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \quad \frac{d^2 s}{(dt)^2} \equiv \frac{d^2 s}{dt^2}$$

verständlich.⁴

5.2. Wichtige Grenzwerte und Ableitungen

Wir werden in diesem Abschnitt einige Ableitungen bestimmen, indem wir sie auf deren ursprüngliche Grenzwert-Definition zurückführen.

a) Die Funktion $y = c = \text{const}$ hat keinen Anstieg, also ist $y' = 0$. Die Ableitung einer Konstante ist Null.

b) Die lineare Funktion $y = ax + b$:

$$y' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[a(x + \varepsilon) + b] - [ax + b]}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{a\varepsilon}{\varepsilon} = a$$

c) Die quadratische Funktion $y = x^2$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(x + \varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2x\varepsilon + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (2x + \varepsilon) = 2x \end{aligned}$$

d) Die Wurzelfunktion $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + \varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x + \varepsilon} - \sqrt{x}}{\varepsilon} \cdot \frac{\sqrt{x + \varepsilon} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \varepsilon} + \sqrt{x}} \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cancel{\varepsilon}}{\varepsilon(\sqrt{x + \varepsilon} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}x^{-1/2} \end{aligned}$$

e) Die reziproke Exponentialfunktion $y = e^{-x}$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-(x+\varepsilon)} - e^{-x}}{\varepsilon} = e^{-x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^{-\varepsilon} - 1}{\varepsilon} = e^{-x} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{e^\varepsilon} \cdot \frac{1 - e^\varepsilon}{\varepsilon} \\ &= e^{-x} \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{e^\varepsilon}}_1 \cdot \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^\varepsilon}{\varepsilon}}_{-1} = -e^{-x} \end{aligned}$$

Anmerkung zum Grenzwert $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^\varepsilon}{\varepsilon}$: Es war

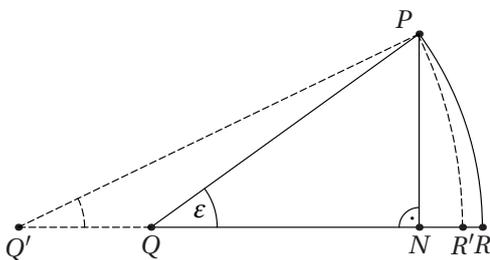
$$\begin{aligned} e &\approx (1 + \varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} \\ e^\varepsilon &\approx 1 + \varepsilon \\ e^\varepsilon - 1 &\approx \varepsilon \\ \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} &\approx 1, \quad \text{sodaf} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 - e^\varepsilon}{\varepsilon} = -1. \end{aligned}$$

⁴Es ist also dt^2 als $(dt)^2$ zu verstehen, was nicht mit $dt^2 = 2t dt$ verwechselt werden darf.

f) Die Sinusfunktion $y = \sin x$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(x + \varepsilon) - \sin x}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\sin x \cos \varepsilon + \cos x \sin \varepsilon) - \sin x}{\varepsilon}, \quad (\text{Additionstheorem}) \\ &= \sin x \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \varepsilon - 1}{\varepsilon} + \cos x \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} \end{aligned}$$

Zur Herleitung der Grenzwerte $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}$ und $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \varepsilon - 1}{\varepsilon}$ Die hier auftretenden Grenzwerte sind über die Berechnung der Ableitungen der Sinus- und Cosinus-Funktion hinaus von Bedeutung.



Aus der Abbildung können wir sowohl ε als auch $\sin \varepsilon$ ablesen:

$$\left. \begin{aligned} \sin \varepsilon &= \frac{\overline{PN}}{\overline{PQ}} \\ \widehat{PR} &= \varepsilon \cdot \overline{PQ} \end{aligned} \right\} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = \frac{\overline{PN} \cancel{\overline{PQ}}}{\cancel{\overline{PQ}} \widehat{PR}} = \frac{\overline{PN}}{\widehat{PR}}$$

Der Dreieckswinkel ε wird kleiner, wenn wir Q nach Q' verschieben. Gleichzeitig geht R nach R' . Verkleinern wir ε weiter, nähert sich das Bogenstück \widehat{PR} der Kathete \overline{PN} immer mehr an. Damit wird $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\overline{PN}}{\widehat{PR}} = 1$, also

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} = 1.$$

Der andere zu berechnende Grenzwert ist

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \varepsilon - 1}{\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \varepsilon - 1}{\varepsilon} \frac{\cos \varepsilon + 1}{\cos \varepsilon + 1} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos^2 \varepsilon - 1}{\varepsilon(\cos \varepsilon + 1)} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 \varepsilon}{\varepsilon(\cos \varepsilon + 1)} = - \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon}}_1 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + 1} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + 1} = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die Ableitung der Funktion $y = \sin x$

$$y' = \cos x.$$

g) Die Cosinusfunktion $y = \cos x$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(x + \varepsilon) - \cos x}{\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(\cos x \cos \varepsilon - \sin x \sin \varepsilon) - \cos x}{\varepsilon}, \quad (\text{Additionstheorem}) \\ &= -\sin x \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin \varepsilon}{\varepsilon} + \cos x \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos \varepsilon - 1}{\varepsilon}, \quad \text{Grenzwerte wie bei f)} \end{aligned}$$

Resultat: $y' = -\sin x$.

5.3. Differentiationsregeln und weitere Ableitungen

Unser Ziel in diesem Abschnitt ist, die Ableitung zusammengesetzter Funktionen auf bekannte Ableitungen zurückzuführen. Wir ordnen nach der Art der Zusammensetzung:

a) Die *Linearkombination* $y = a \cdot u(x) + b \cdot v(x)$ mit $a, b = \text{const}$:

Aus der Definition der Ableitung folgt unmittelbar die Linearitätseigenschaft

$$\boxed{y' = au' + bv'}$$

In Worten: Die Ableitung der Linearkombination zweier Funktionen ist die Linearkombination ihrer Ableitungen.

Beispiel Aus der Definition der *Hyperbelfunktionen* folgt unmittelbar

$$\text{für } y = \sinh x : y' = \cosh x \quad \text{und für } y = \cosh x : y' = \sinh x.$$

b) Das *Produkt* $y = u(x) \cdot v(x)$ zweier Funktionen: Es ist

$$y' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon)v(x + \varepsilon) - u(x)v(x)}{\varepsilon}.$$

Diese Grenzwert-Definition der Ableitung des Produktes $u(x) \cdot v(x)$ enthält bereits die Elemente der Grenzwert-Definition der Ableitungen der Faktoren, jedoch nicht in der richtigen Kombination. Wir fügen daher den Summanden $\frac{u(x + \varepsilon)v(x)}{\varepsilon}$ hinzu und subtrahieren ihn sofort wieder, um keinen Fehler zu machen. Wir haben letztlich Null addiert, aber auf eine zweckdienliche Weise, denn wir erhalten

$$y' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[u(x + \varepsilon) \frac{v(x + \varepsilon) - v(x)}{\varepsilon} + v(x) \frac{u(x + \varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \right].$$

Mit $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u(x + \varepsilon) = u(x)$ (Stetigkeit) wird weiterhin

$$y' = u(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{v(x + \varepsilon) - v(x)}{\varepsilon} + v(x) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon) - u(x)}{\varepsilon}.$$

Das Ergebnis ist die *Produktregel*

$$\boxed{y' = u \cdot v' + v \cdot u'}$$

Beispiel Wir benutzen die Produktregel, um durch vollständige Induktion zu beweisen, daß die Ableitung der *Potenzfunktion* $y = x^n$, $n \geq 1$ ganz, durch

$$y' = n \cdot x^{n-1}$$

gegeben ist. In Worten: Wir leiten eine Potenzfunktion ab, indem wir mit ihrem Exponenten als Faktor die Potenzfunktion multiplizieren, deren Exponent um 1 erniedrigt ist.

- 1. Schritt: Induktionsanfang
Die Regel gilt für $n = 2$ (siehe „quadratische Funktion“)
- 2. Schritt: Induktionsvoraussetzung
Die Regel gilt für eine beliebige ganze Zahl $n = k$.
- 3. Schritt: Induktionsbehauptung
Dann gilt die Regel auch für $n = k + 1$.
- 4. Schritt: Induktionsbeweis

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} x^{k+1} &= \frac{d}{dx} (x \cdot x^k) \\ &= 1 \cdot x^k + x \cdot kx^{k-1}, \quad \text{nach Voraussetzung} \\ &= (1 + k) \cdot x^k. \quad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

c) Der *Kehrwert* $y = \frac{1}{u(x)}$ einer Funktion $u(x)$:

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{1}{u(x + \varepsilon)} - \frac{1}{u(x)} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \frac{u(x) - u(x + \varepsilon)}{u(x) \cdot u(x + \varepsilon)} \\ &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{u(x + \varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{u(x) \cdot u(x + \varepsilon)} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist die *Reziprokenregel*

$$\boxed{y' = -\frac{u'}{u^2}}.$$

Beispiele

- Wir erweitern die Regel für die Ableitung einer Potenzfunktion für den Fall, daß der Exponent eine negative ganze Zahl ist,

$$y = x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \quad n \geq 1 \text{ ganz.}$$

In diesem Fall ist $u = x^n$ mit der Ableitung $u' = nx^{n-1}$. Damit wird

$$y' = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

- Nochmals zur Exponentialfunktion mit negativem Exponenten,

$$y = e^{-x} = \frac{1}{e^x} :$$

Hier ist $u = e^x$ mit der Ableitung $u' = e^x$ und damit

$$y' = -\frac{e^x}{e^{2x}} = -e^{-x}.$$

- d) Der *Quotient* $y = \frac{u(x)}{v(x)}$ zweier Funktionen:

Wir schreiben

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} = u(x) \cdot \frac{1}{v(x)}$$

und wenden sowohl die Produkt- als auch die Reziprokenregel an,

$$\begin{aligned} y' &= u' \cdot \frac{1}{v} + u \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{v} \right), && \text{Produktregel} \\ &= \frac{u'}{v} - u \cdot \frac{v'}{v^2}, && \text{Reziprokenregel.} \end{aligned}$$

Das Ergebnis ist die *Quotientenregel*

$$\boxed{y' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}.$$

Hier ist die Reihenfolge der Summanden im Zähler zu beachten.

Beispiele

- $y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

In diesem Fall ist $u = \sin x$ mit der Ableitung $u' = \cos x$ und $v = \cos x$ mit der Ableitung $v' = -\sin x$. Nach der Quotientenregel ist somit die Ableitung der Tangensfunktion

$$y' = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

- $y = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x}$

Wir könnten wieder die Quotientenregel anwenden. Schneller führt jedoch die Reziprokenregel zum Ziel: Mit $u = \tan x$ und der soeben berechneten Ableitung

$u' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ergibt sich die Ableitung der Cotangensfunktion zu

$$y' = -\frac{1}{\cos^2 x \cdot \tan^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

- e) Die *verkettete Funktion* oder „Funktion einer Funktion“ $y = y[u(x)]$:
 Eine Änderung von x um Δx bewirkt eine Änderung Δu und diese wiederum eine Änderung Δy , sodaß mit $\Delta x \rightarrow 0$ auch $\Delta u \rightarrow 0$. Dabei setzen wir für alle Funktionen die unter „Glattheit“ zusammengefaßten Eigenschaften voraus. Dies führt unmittelbar auf die *Kettenregel*

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}.$$

Wir sehen hier besonders deutlich, wie verführerisch die Leibniz-Notation ist. Daher sollten wir nicht vergessen, daß der Differentialquotient symbolisch für einen Grenzwert steht!

Beispiel Die Exponentialfunktion $y = a^x$ mit der allgemeinen Basis a :
 Wir schreiben $y = e^{x \cdot \ln a} = e^u$ und mit $u = x \cdot \ln a$ und den Ableitungen

$$\frac{dy}{du} = e^u = e^{x \cdot \ln a} = a^x \quad \text{bzw.} \quad \frac{du}{dx} = \ln a.$$

Damit ist nach der Kettenregel

$$y'(x) = a^x \cdot \ln a.$$

(Für $a = e$ stimmt das wegen $\ln e = 1$ mit $y' = e^x$ überein.)

5.4. Implizites Differenzieren

Beispiele Die Technik des *impliziten Differenzierens* wollen wir anhand zweier Beispiele einführen.

a) $y = \ln x$

Wir kennen die Ableitung (noch) nicht, aber wir kennen die Ableitung der *Umkehrfunktion* $y = e^x$. Wir schreiben in einem Zwischenschritt $x = e^y$, sodaß die Funktion $y = \ln x$ nicht mehr nach y aufgelöst, sondern *implizit* gegeben ist.

- **1. Schritt:** Wir leiten $x = e^y$ nach x ab und beachten, daß y von x abhängt. Die Ableitung der linken Seite ergibt

$$\frac{dx}{dx} = 1,$$

und die der rechten Seite ist nach der Kettenregel

$$\frac{de^y}{dx} \equiv \frac{de^y}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = e^y \frac{dy}{dx},$$

worin $\frac{dy}{dx}$ die eigentlich gesuchte Ableitung ist. Beides zusammen ergibt

$$e^y \frac{dy}{dx} = 1.$$

- 2. Schritt: Wir lösen nach $\frac{dy}{dx}$ auf,

$$\frac{dy}{dx} = e^{-y} = \frac{1}{e^y}.$$

- 3. Schritt: Wir führen die Variable x wieder ein und erhalten das Ergebnis

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}.$$

Andererseits folgt aus $x = e^y$ durch Ableitung nach y

$$\frac{dx}{dy} = e^y = x.$$

Der Vergleich mit dem soeben erhaltenen Resultat für $\frac{dy}{dx}$ ergibt, daß

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$$

gilt.

b) $y = \sqrt[n]{x} = x^{1/n}$, (n ganz)

Wieder kennen wir die Ableitung der Umkehrfunktion und nehmen $x = y^n$ als Ausgangspunkt.

- 1. Schritt: Die Ableitung von $x = y^n$ auf beiden Seiten nach x ergibt

$$1 = ny^{n-1} \cdot y'.$$

- 2. Schritt: Auflösen nach y' ergibt

$$y' = \frac{1}{ny^{n-1}}.$$

- 3. Schritt: Die Wiedereinführung der Variablen x führt auf das Resultat

$$y' = \frac{1}{nx^{\frac{1}{n}(n-1)}} = \frac{1}{nx^{1-\frac{1}{n}}} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Andererseits ist auch hier mit $x = y^n$

$$\frac{dx}{dy} = ny^{n-1} = nx^{1-\frac{1}{n}}$$

und also

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}.$$

Wir haben damit gezeigt, daß die Regel für die Ableitung von Potenzfunktionen auch für gebrochene Exponenten gilt. Speziell bestätigen wir für $n = 2$, also $y = \sqrt{x} = x^{1/2}$ die bereits bekannte Ableitung $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Verallgemeinerung der Beispiele Es gilt die *Umkehrregel*

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}}.$$

Diese Regel wird durch die Beispiele nahegelegt; einen allgemeingültigen Beweis dafür haben wir nicht gegeben. Sie sollte auch nicht mit der Reziprokenregel verwechselt werden.

Weitere Beispiele

a) $y = \log_a x$

Wir schreiben $x = a^y$ mit der durch die Variable x auszudrückenden Ableitung $\frac{dx}{dy} = a^y \cdot \ln a = x \cdot \ln a$ und erhalten mit der Umkehrregel das Ergebnis

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

b) $y = \arcsin x$

Wir schreiben $x = \sin y$ mit der Ableitung $\frac{dx}{dy} = \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \sqrt{1 - x^2}$. Die gesuchte Ableitung ist

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(und entsprechend für die anderen zyklometrischen Funktionen).

Die logarithmische Ableitung – Beispiele Die *logarithmische Ableitung* ist eine spezielle Anwendung der impliziten Differentiation. Wir erläutern sie anhand von Beispielen.

a) $y = x^x$

Obwohl die Variable y explizit gegeben ist, schreiben wir implizit $\ln y = x \cdot \ln x$ und leiten beide Seiten nach x ab, die linke Seite nach der Kettenregel, die rechte nach der Produktregel,

$$\begin{aligned} y' \cdot \frac{1}{y} &= \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \\ y' &= y(1 + \ln x) = x^x(1 + \ln x). \end{aligned}$$

b) $y = u \cdot v$

Wir kommen noch einmal auf die Produktregel zurück und schreiben implizit $\ln y = \ln u(x) + \ln v(x)$. Durch Ableiten beider Seiten nach x mittels Kettenregel erhalten wir, wie es sein muß,

$$\begin{aligned} y' \cdot \frac{1}{y} &= u' \frac{1}{u} + v' \frac{1}{v} \quad \Big| \cdot y \\ y' &= u'v + uv'. \end{aligned}$$

c) $y = x^n$

Wir schreiben in impliziter Form $\ln y = n \cdot \ln x$ und bilden die Ableitung nach x ,

$$\frac{y'}{y} = \frac{n}{x}$$
$$y' = \frac{n}{x} y = \frac{n}{x} x^n = nx^{n-1}.$$

d) $y = a^x$

Wir schreiben $\ln y = x \cdot \ln a$ und leiten nach der Variablen x ab,

$$\frac{y'}{y} = \ln a$$
$$y' = y \ln a = a^x \cdot \ln a.$$

Die letzten drei Beispiele dienen dazu, bereits bekannte Ergebnisse auf neue Art zu reproduzieren.

5.5. Zusammenfassung der Ableitungsregeln und Ableitungen elementarer Grundfunktionen

a) Ableitungsregeln

y	$y' \equiv \frac{dy}{dx}$	
$a \cdot u(x) + b \cdot v(x)$	$a \cdot u' + b \cdot v'$	$a, b = \text{const}$; Linearität
$u(x) \cdot v(x)$	$u'v + uv'$	Produktregel
$\frac{1}{u(x)}$	$-\frac{u'}{u^2}$	Reziprokenregel
$\frac{u(x)}{v(x)}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	Quotientenregel
$u[v(x)]$	$\frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$	Kettenregel
Umkehrfunktion	$\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}$	Umkehrregel

b) Ableitungen elementarer Grundfunktionen

Tabelle links: Aus der Grenzwert-Definition der Ableitung.

Tabelle rechts: Mit Hilfe der Ableitungsregeln.

y	y'
$c = \text{const}$	0
$ax + b$	a
x^2	$2x$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$

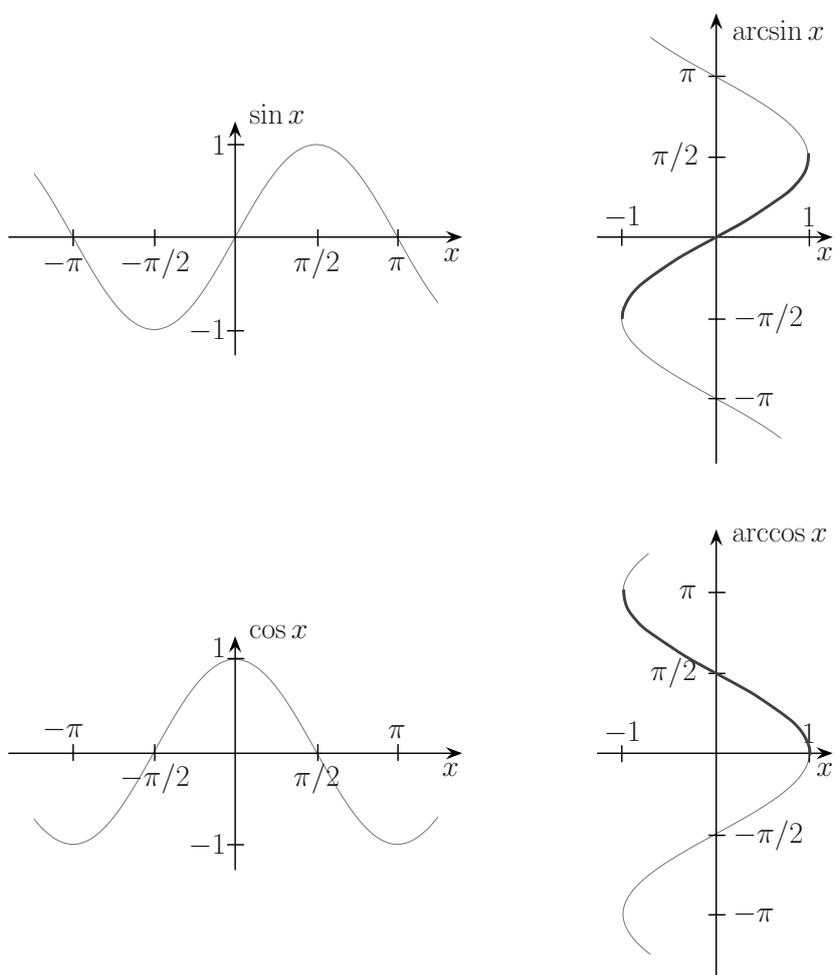
y	y'
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
x^n	nx^{n-1}
x^{-n}	$(-n)x^{-n-1}$
$x^{\frac{1}{n}}$	$\frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
a^x	$a^x \cdot \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

5.6. Zusätzlicher Inhalt: Zyklometrische Funktionen

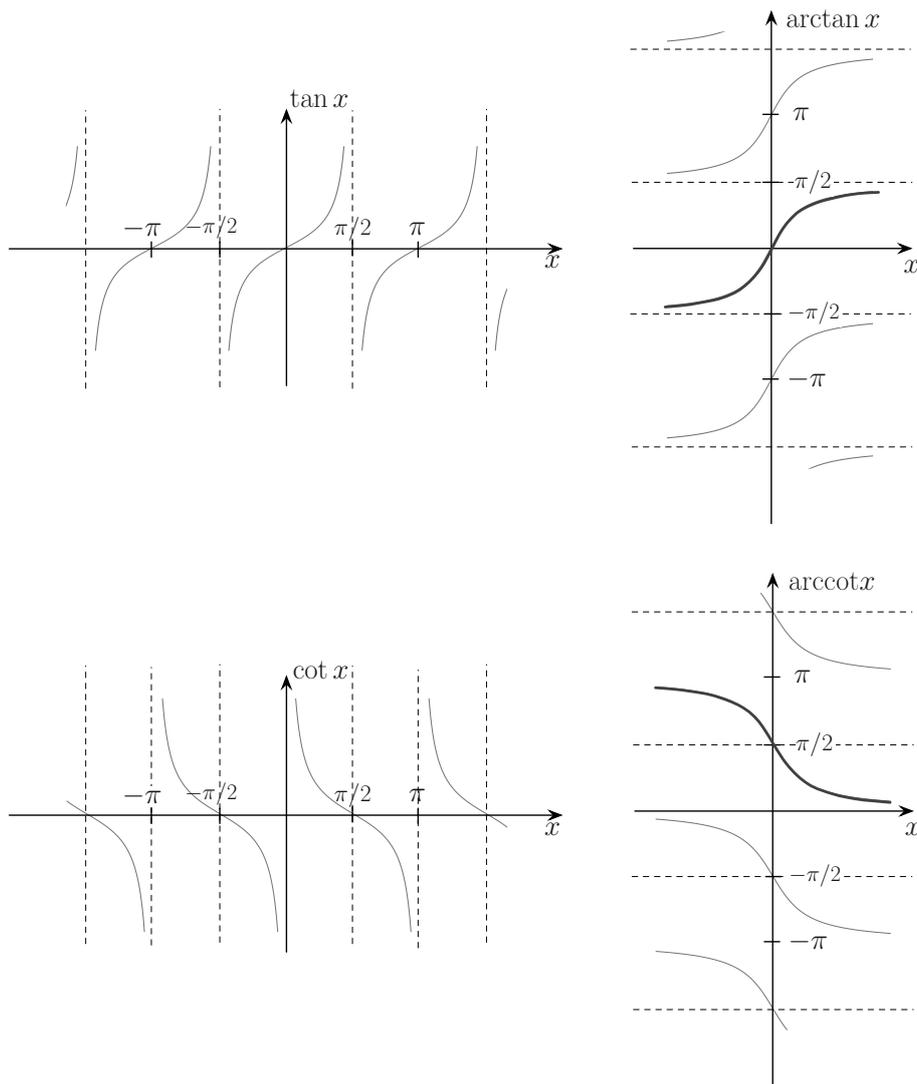
Die zyklometrischen Funktionen sind die Umkehrfunktionen der trigonometrischen Funktionen. Man bezeichnet z.B. die Umkehrfunktion von $y = \sin x$ mit $y = \arcsin x$, sodaß

$$\sin(\arcsin x) = x$$

ist (vergleiche $e^{\ln x} = x$).⁵ Die Periodizität der trigonometrischen Funktionen zieht eine *Vieldeutigkeit* der zyklometrischen Funktionen nach sich, und es kommt somit zu einem Problem mit dem Funktionsbegriff. Um diesen zu retten, definiert man *Hauptwerte* und erfasst damit jeweils nur einen eindeutigen Zweig.



⁵Wir werden *nicht* die in der Literatur manchmal anzutreffende Bezeichnung $\arcsin x \equiv \sin^{-1} x$ verwenden, um Verwechslungen mit $\sin^{-1} x = \frac{1}{\sin x}$ zu vermeiden.



5.7. Zusätzlicher Inhalt: Nochmals zur Ableitung der Kreisfunktionen

Wir kommen noch einmal zur Ableitung der Sinus- und der Cosinus-Funktion zurück. Unser Ziel ist ein geometrisches Verständnis der bereits bekannten Resultate, insbesondere des bei der Ableitung der Cosinus-Funktion auftretenden Minuszeichens.

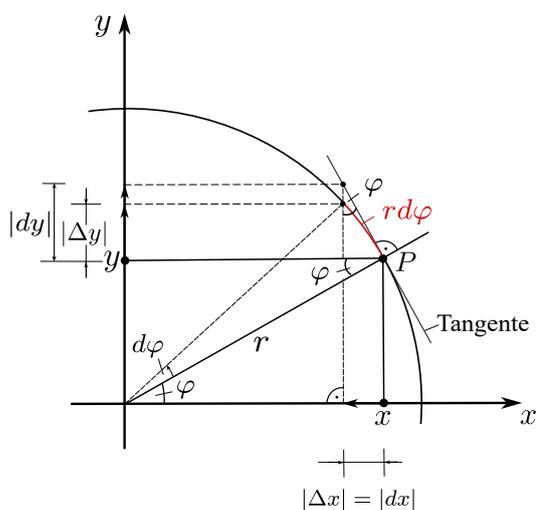
Die trigonometrischen Funktionen heißen auch *Kreisfunktionen*, denn ein Punkt P auf einem Kreis mit dem Radius r hat die kartesischen Koordinaten

$$x = r \cos \varphi \quad \text{und} \quad y = r \sin \varphi .$$

Ändert sich der Winkel φ im mathematisch positiven Sinn um den Betrag $\Delta\varphi = d\varphi$, nimmt

die x -Koordinate des Punktes P um den Betrag $|\Delta x|$ ab, die y -Koordinate um $|\Delta y|$ zu. Es ist also

$$\Delta x = -|\Delta x| \quad \text{und} \quad \Delta y = |\Delta y|.$$



Auf dem Kreis wird dabei ein Bogenstück mit der Länge $\Delta s = ds = r d\varphi$ zurückgelegt. Wir dürfen dieses Bogenstück mit umso größerer Berechtigung als die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ansehen, je kleiner $d\varphi$ ist. Die Katheten dieses Dreiecks haben die Längen $|dx|$ und $|dy|$. Da die Verlängerung des Radius' eines Kreises in einem bestimmten Punkt senkrecht auf der dortigen Tangente an den Kreis steht, tritt nach dem Satz „Winkel, deren Schenkel paarweise aufeinander senkrecht stehen, sind gleich“ der Winkel φ auch in diesem Dreieck auf.

Damit ist in diesem Dreieck

$$\sin \varphi = \frac{|dx|}{r d\varphi} = -\frac{dx}{r d\varphi} \quad \text{und} \quad \cos \varphi = \frac{|dy|}{r d\varphi} = \frac{dy}{r d\varphi}.$$

Mit $x = r \cos \varphi$ wird, da $r = \text{const}$ ist, $dx = r d(\cos \varphi)$, und mit $y = r \sin \varphi$ erhalten wir $dy = r d(\sin \varphi)$. Dies eingesetzt ergibt unabhängig von r

$$\frac{d(\cos \varphi)}{d\varphi} = -\sin \varphi \quad \text{und} \quad \frac{d(\sin \varphi)}{d\varphi} = \cos \varphi.$$

6. Differentialrechnung mit zwei und drei Variablen

Die Differentialrechnung mit mehreren unabhängigen Variablen spielt in der Physik eine große Rolle, da Naturvorgänge wie etwa die Ausbreitung von Wellen oder die Wärmeleitung in Raum und Zeit ablaufen. So hängt z.B. eine elektrische Feldstärke im allgemeinen von den drei Raumkoordinaten und der Zeitkoordinate, also von vier unabhängigen Variablen ab. Mit anderen Variablen als Raum und Zeit spielen die in diesem Kapitel entwickelten Methoden insbesondere in der Thermodynamik eine Rolle, wo – um ein Beispiel zu geben – die thermische Zustandsgleichung eines Gases beschreibt, wie der Druck von Volumen und Temperatur abhängt.

6.1. Funktionen mit zwei unabhängigen Variablen. Die partielle Ableitung

Zu Beginn erwähnen wir zwei Beispiele für Funktion mit zwei unabhängigen Variablen, die uns aus dem Alltag bekannt sind, ohne daß wir sie üblicherweise unter diesem Aspekt betrachten.

- a) Die Erhebung h einer Landschaft über dem Meeresspiegelniveau an verschiedenen geographischen Orten (x, y) kann durch eine (normalerweise nicht analytisch faßbare) Funktion $h = h(x, y)$ der beiden unabhängigen Variablen x und y beschrieben werden. *Höhenlinien* auf einer Landkarte, die Punkte gleicher Höhe $h = h_0$ verbinden, sind dann Funktionen $y = y(x; h_0)$ von einer unabhängigen Variablen und dem Parameter $h = h_0 = \text{const.}$
- b) Auf Wetterkarten finden wir weitere Beispiele.
 - So ist die Temperatur T an verschiedenen geographischen Orten im allgemeinen verschieden und kann durch das „Temperaturgebirge“ $T = T(x, y)$ beschrieben werden. Die „Höhenlinien“, also die Linien konstanter Temperatur T_0 , heißen dann *Isothermen* $y = y(x; T_0)$.
 - Auch der Luftdruck p unterscheidet sich von Ort zu Ort, was mit einer Funktion $p = p(x, y)$ beschrieben werden kann. Dabei verbinden *Isobaren* $y = y(x; p_0)$ Orte mit dem gleichen Luftdruck $p = p_0$.

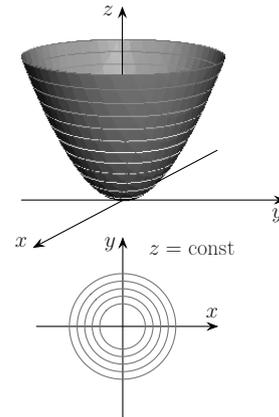
Funktionen von zwei unabhängigen Variablen können ganz verschiedene Formen annehmen, z.B. auch

$$z = f(x, y) = x^3y + xy^2 + x + y^2 + 1,$$

ohne daß jedesmal eine besondere Bedeutung oder Anschauung zugrunde liegen muß. Einige einfache und anschauliche Beispiele sind:

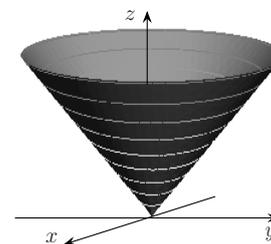
a) Das Paraboloid $z = f(x, y) = x^2 + y^2$

- Die Funktion beschreibt ein Paraboloid, da wir wahlweise für $x = 0$ und $y = 0$ die Parabeln $z = y^2$ bzw. $z = x^2$ erhalten.
- Die Höhenlinien $z = c = \text{const}$ sind Kreise $x^2 + y^2 = c$ mit dem Radius \sqrt{c} , die wir in die (x, y) -Ebene projizieren. Das Paraboloid ist ein Rotationsparaboloid.



b) Der Kegel $z = f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

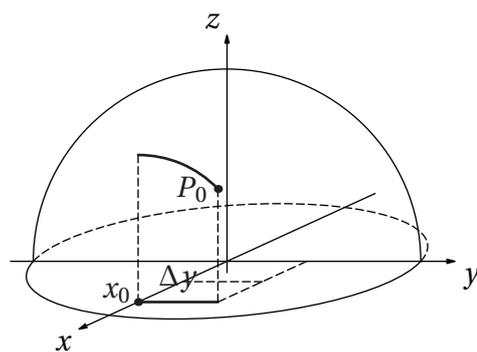
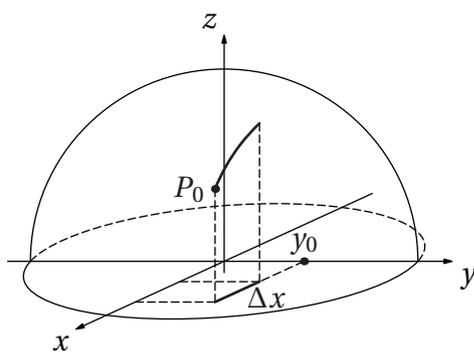
- Die Funktion beschreibt einen Kegel, da wir wahlweise für $x = 0$ und $y = 0$ die Geraden (Mantellinien) $z = y$ bzw. $z = x$ erhalten.
- Die Höhenlinien $z = c = \text{const}$ sind Kreise $x^2 + y^2 = c^2$ mit dem Radius c . Der Kegel ist ein Kreiskegel.



c) Die obere Halbkugel mit dem Radius $R = 2$: $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

Wir betrachten eine Funktion mit zwei Variablen und illustrieren diese durch das Beispiel der oberen Halbkugel. Dann haben wir (vorerst) zwei Möglichkeiten, die unabhängigen Variablen zu ändern:

- Wir schreiten in x -Richtung fort, $x \rightarrow x + \Delta x$, und halten y fest ($y = y_0 = \text{const}$).
- Wir schreiten in y -Richtung fort, $y \rightarrow y + \Delta y$, und halten x fest ($x = x_0 = \text{const}$).



Wir definieren analog zur gewöhnlichen Ableitung die *partielle Ableitung* für jede Variable getrennt und vermerken, daß wir die jeweils andere Variable konstant halten,

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y_0) - f(x, y_0)}{\Delta x}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y} \equiv f_y = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y + \Delta y) - f(x_0, y)}{\Delta y}.$$

Das Symbol $\frac{\partial f}{\partial x} \equiv f_x$ (gesprochen „partiell df nach dx “) soll ausdrücken, daß noch andere Variable existieren. Diese werden beim Differenzieren wie Konstanten behandelt. Darüber hinaus gibt es keine neuen Rechenregeln.

Beispiele Wir leiten nach den bisher bekannten Regeln zwei Beispielfunktionen jeweils nach den Variablen x und y ab.

a) $z = f(x, y) = x^3 y + x y^2 + x + y^2 + 1$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y + y^2 + 1, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x^3 + 2xy + 2y$$

b) $z = f(x, y) = \frac{x}{x + y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x + y) - x}{(x + y)^2} = \frac{y}{(x + y)^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-x}{(x + y)^2} \quad (\text{Quotientenregel})$$

Kettenregel, Reisegleichung Wir betrachten die Funktion $z = f[x(t), y(t)]$ als „Funktion von zwei Funktionen“, deren Variablen x und y ihrerseits von einer Variablen t abhängen. Damit wird auch z eine Funktion der Variablen t , und wie sie sich mit t ändert, hängt davon ab, wie die Variablen x und y sich mit t ändern. Dann ist die gesamte Änderung oder die *totale Ableitung* von z nach der Variablen t

$$\boxed{\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}}.$$

Das ist gleichzeitig eine Verallgemeinerung der *Kettenregel* (beachte die Schreibweise „ d “ und „ ∂ “ der einzelnen Ableitungen).

Folgende Vorstellung mag für das Verständnis nützlich sein: Die Temperatur an der Oberfläche eines Teiches ist $T = T(x, y)$. An den Orten (x, y) auf dem Teich soll sie sich zeitlich nicht ändern. Wir betrachten also ein so kleines Zeitintervall, daß wir Temperaturschwankungen infolge einer Änderung der Bewölkung oder infolge der fortschreitenden Tageszeit nicht erfassen. Eine Ente, die entlang der Bahnkurve $x = x(t)$, $y = y(t)$ schwimmt (t : Zeit), erfährt jedoch eine zeitliche Temperaturänderung, da sie an Orte mit unterschiedlicher (aber zeitlich konstanter) Temperatur gelangt. So ist in der Regel die Temperatur in der Mitte des Teiches niedriger als im flachen Wasser in Ufernähe. Wie schnell die Ente die gefühlte Temperaturänderung erlebt, hängt natürlich auch davon ab, welche Geschwindigkeit sie hat. Damit ist die *von der Ente erlebte* Zeitabhängigkeit der Temperatur auf dem Teich

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y} \frac{dy}{dt}.$$

Die partiellen Ableitungen bringen eine Eigenschaft des Teiches zum Ausdruck („Wie ändert sich die Temperatur von Ort zu Ort?“), während $\frac{dx}{dt}$ und $\frac{dy}{dt}$ eine Eigenschaft der Ente sind, nämlich die Komponenten ihrer Geschwindigkeit.

Diese Gleichung lässt sich als Skalarprodukt

$$\frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} \right) \left(\frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} \right)$$

schreiben. Unser Beispiel macht deutlich, warum sie auch *Reisegleichung* heißt. Die Ente erlebt keine Temperaturänderung, wenn sie gar nicht schwimmt oder wenn die Temperatur auf dem Teich überall gleich ist. Die Temperaturänderung ist auch Null, wenn die Ente senkrecht zu dem Vektor $\left(\frac{\partial T}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \vec{j} \right)$ schwimmt. Das ist offenbar die Richtung der Isothermen. Die Temperaturänderung ist hingegen maximal bei einer Geschwindigkeit in Richtung dieses Vektors. Einem Vektor mit dieser Struktur werden wir mehrfach wiederbegegnen und ihm später einen eigenen Namen geben.

Beispiele Wir rechnen zu Übungszwecken zwei Beispiele für die Kettenregel.

a) $z = \sin(xy)$ mit $x = t^2$ und $y = t^3$

- direkt: $z = \sin t^5, \quad \frac{dz}{dt} = 5t^4 \cos t^5$
- mit der Kettenregel:

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= y \cos(xy) \cdot 2t + x \cos(xy) \cdot 3t^2 \\ &= (2ty + 3t^2x) \cos(xy) = 5t^4 \cos t^5, \quad \text{Übereinstimmung} \end{aligned}$$

b) $z = x(t) \cdot y(t)$

Die Kettenregel, angewandt auf das Produkt der beiden Variablen $x(t)$ und $y(t)$,

$$\frac{dz}{dt} = y \frac{dx}{dt} + x \frac{dy}{dt},$$

ergibt die Produktregel für die eine Variable t .

Zu den zweiten Ableitungen Wir fassen wieder die beiden ersten Ableitungen als Funktionen von x und y auf. Dann lässt sich jede erste Ableitung nach beiden unabhängigen Variablen differenzieren, so daß vier zweite Ableitungen möglich sind, nämlich

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \equiv z_{xx}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \equiv z_{yy}$$

aber auch „gemischt“

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \equiv z_{xy}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \equiv z_{yx}.$$

Dabei gilt (hier ohne Beweis) der *Satz von Schwarz über die Vertauschbarkeit der gemischten zweiten partiellen Ableitungen*,

$$\boxed{\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}}.$$

Beispiel Wir betrachten noch einmal die Funktion $z = f(x, y) = \frac{x}{x+y}$, deren erste Ableitungen wir oben berechnet haben. Wir erhalten mit Hilfe der Quotientenregel

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{(x+y)^2 - y \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{x^2 + \cancel{2xy} + y^2 - \cancel{2xy} - 2y^2}{(x+y)^4} = \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^4} \\ &= \frac{x-y}{(x+y)^3} \end{aligned}$$

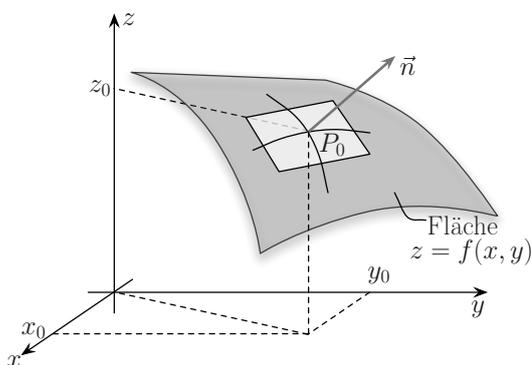
und

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{-(x+y)^2 + x \cdot 2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{-x^2 - \cancel{2xy} - y^2 + 2x^2 + \cancel{2xy}}{(x+y)^4} = \frac{x^2 - y^2}{(x+y)^4} \\ &= \frac{x-y}{(x+y)^3}, \quad \text{Übereinstimmung.} \end{aligned}$$

6.2. Geometrische Interpretation:

Tangentialebene und Normalenvektor einer Fläche

Die geometrische Bedeutung der Ableitung einer Funktion mit einer Variablen an einem bestimmten Punkt ist der Anstieg der Tangente in diesem Punkt. Bei zwei Variablen haben wir nun *zwei* Tangenten, welche die *Tangentialebene* in einem Punkt P_0 aufspannen. Die Gleichungen der beiden Tangenten im Punkt P_0 sind



$$\begin{aligned} x = x_0 : \quad z &= z_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cdot (y - y_0) \\ y = y_0 : \quad z &= z_0 + \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cdot (x - x_0). \end{aligned}$$

Wir schreiben die Gleichung der Tangentialebene nun in der Form

$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \vec{n} = 0$$

auf, explizit

$$n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0.$$

Der Vergleich mit den Tangentengleichungen ergibt

$$\begin{aligned} x = x_0 : \quad n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) &= 0 \quad \rightarrow \quad n_2 = -\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0}, \quad n_3 = 1 \\ y = y_0 : \quad n_1(x - x_0) + n_3(z - z_0) &= 0 \quad \rightarrow \quad n_1 = -\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0}, \quad n_3 = 1. \end{aligned}$$

Der Normalenvektor der Tangentialebene im Punkt P_0 ist also

$$\vec{n} = -\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{P_0} \cdot \vec{i} - \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{P_0} \cdot \vec{j} + \vec{k}.$$

Die geometrische Interpretation der partiellen Ableitungen ist nun offensichtlich. Sie sind die Komponenten des Normalenvektors der Tangentialebene im Punkt P_0 . Die *Gleichung der Tangentialebene*, interpretierbar als die lineare Approximation von $z = f(x, y)$ im Punkt P_0 , ist

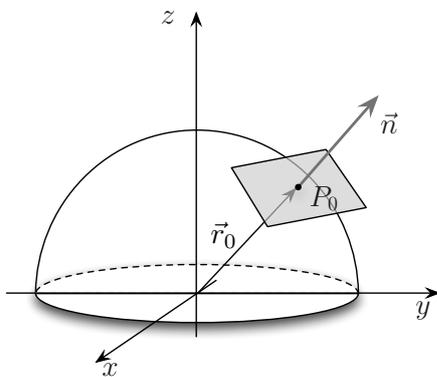
$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{P_0}\right)(x-x_0) + \left(-\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{P_0}\right)(y-y_0) + (z-z_0) = 0,$$

was wieder in Gestalt eines Skalarproduktes, nämlich

$$\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{P_0} \cdot \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{P_0} \cdot \vec{j} + \vec{k}\right) \left[(x-x_0)\vec{i} + (y-y_0)\vec{j} + (z-z_0)\vec{k}\right] = 0$$

geschrieben werden kann. Die Struktur dieser Gleichung ähnelt der Reisesgleichung. Insbesondere ist der erste Faktor wieder ein Vektor, dessen Komponenten räumliche Ableitungen einer skalaren Funktion sind.

Beispiel



Die obere *Einheits-Halbkugel* wird beschrieben durch

$$z = f(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}.$$

Wir erwarten, dass der Normalenvektor \vec{n} dieser Fläche in jedem Punkt P_0 parallel zum Radiusvektor \vec{r}_0 ist. Die Berechnung von \vec{n} ergibt

$$\frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{P_0} = \frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\bigg|_{P_0} = -\frac{x_0}{z_0}$$

und

$$\frac{\partial f}{\partial y}\bigg|_{P_0} = -\frac{y_0}{z_0}.$$

Damit ist

$$\vec{n} = \frac{x_0}{z_0}\vec{i} + \frac{y_0}{z_0}\vec{j} + \vec{k},$$

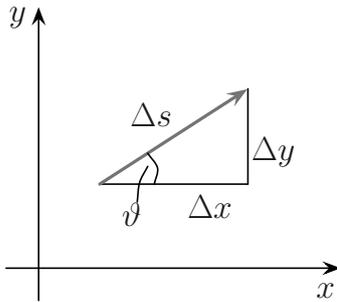
woraus nach Multiplikation mit z_0 , die keine Änderung der Richtung bewirkt, wie erwartet

$$\vec{\tilde{n}} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j} + z_0\vec{k} = \vec{r}_0$$

resultiert. Dazu ist aber anzumerken, daß auf dem Einheitskreis selbst die Halbkugel zwar definiert ($x^2 + y^2 = 1, z = 0$), aber nicht differenzierbar ist, da wir nicht wissen, wie wir dort auf eindeutige Weise eine Tangentialebene anlegen sollen.

6.3. Richtungsableitung und Gradient

In diesem Abschnitt wollen wir uns der Frage zuwenden, welchen Zuwachs eine Funktion $z = f(x, y)$ erfährt, wenn wir einen Schritt in der (x, y) -Ebene gehen, der nicht parallel zur x - oder y -Achse verläuft, sondern in Richtung des *Einheitsvektors* $\vec{s} = \cos \vartheta \cdot \vec{i} + \sin \vartheta \cdot \vec{j}$.



$$\cos \vartheta = \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

$$\sin \vartheta = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

Das ist wieder als Skalarprodukt

$$\frac{dz}{ds} = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \right) (\cos \vartheta \cdot \vec{i} + \sin \vartheta \cdot \vec{j})$$

schreibbar, und wir erkennen die strukturelle Ähnlichkeit zur Reiseleichung.

Diskussion Wir untersuchen Spezialfälle der Richtungsableitung.

- a) Wir legen den Schritt Δs in der (x, y) -Ebene einmal parallel zur x -Achse, dann parallel zur y -Achse.

- $\vartheta = 0$ (entsprechend $\Delta s = \Delta x$ und $\Delta y = 0$): Die Richtungsableitung in Richtung der x -Achse ist

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x},$$

- $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ (entsprechend $\Delta s = \Delta y$ und $\Delta x = 0$): Die Richtungsableitung in Richtung der y -Achse ist

$$\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

- b) Wir stellen die Frage, in welcher Richtung ϑ_h vom Punkt P_0 aus eine *Höhenlinie* verläuft. Höhenlinien sind Linien konstanter Höhe, also durch $\frac{dz}{ds} = 0$ bestimmt. Die Bedingung

$$\frac{dz}{ds} = f_x \cos \vartheta_h + f_y \sin \vartheta_h \stackrel{!}{=} 0$$

führt auf

$$\tan \vartheta_h = -\frac{f_x}{f_y},$$

wobei in die Ableitungen die Koordinaten des Punktes P_0 einzusetzen sind.

- c) In welcher Richtung ϑ_m ist der Anstieg (Zunahme oder Abnahme der Höhe) maximal? Wir haben die Extremwertaufgabe

$$\frac{d}{d\vartheta} \left(\frac{dz}{ds} \right) = -f_x \sin \vartheta_m + f_y \cos \vartheta_m \stackrel{!}{=} 0$$

zu lösen und erhalten

$$\tan \vartheta_m = \frac{f_y}{f_x}.$$

Zusammen mit dem Resultat von b) ist

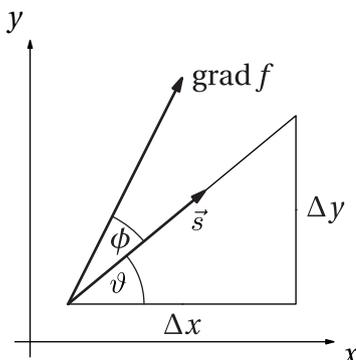
$$\tan \vartheta_h \cdot \tan \vartheta_m = -1.$$

In Worten: In jedem Punkt des Höhenliniendiagramms steht die Richtung des steilsten Anstiegs senkrecht auf der Richtung der Höhenlinien.

Wir betrachten nun das Skalarprodukt in dem Ausdruck für die Richtungsableitung. Schließt der Vektor $\left(\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \right)$ mit dem Einheitsvektor $\vec{s} = \cos \vartheta \vec{i} + \sin \vartheta \vec{j}$ den Winkel ϕ ein, ist

$$\frac{dz}{ds} = \left| \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} \right| \cdot \cos \phi.$$

Anstieg $\left(\frac{dz}{ds} > 0 \right)$ und Abfall $\left(\frac{dz}{ds} < 0 \right)$ sind somit für $\phi = 0$ und $\phi = \pi$ maximal, wenn wir unsere Schritte in bzw. entgegen der Richtung des Vektors $\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}$ lenken.



Diesen Vektor nennen wir den *Gradient* von f und schreiben dafür

$$\text{grad } f \equiv \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j}.$$

Bei zwei unabhängigen Variablen x und y ist der Gradient also ein zweikomponentiger Vektor in der (x, y) -Ebene. Er wird von einer skalaren Funktion gebildet, und seine Komponenten sind die partiellen Ableitungen dieser Funktion nach den Koordinaten x und y .

Anmerkung Wegen der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen besteht zwischen den Komponenten des Gradienten der Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right).$$

Daher kann nicht jeder Vektor $\vec{v} = v_1 \vec{i} + v_2 \vec{j}$ als Gradient einer skalaren Funktion darstellbar sein, sondern nur, wenn

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} = \frac{\partial v_2}{\partial x}.$$

erfüllt ist.

Wichtige Formeln dieses Abschnitts lassen sich bei Verwendung des Begriffs „Gradient“ in der Form

$$\frac{dz}{ds} = \vec{s} \cdot \text{grad } f$$

für die Richtungsableitung und

$$\frac{dT}{dt} = \vec{v} \cdot \text{grad } T$$

für die Reisegleichung aufschreiben.

Differenzen und Differentiale Wir verallgemeinern hier die Diskussion über den Unterschied zwischen Differenzen und Differentialen für den Fall von zwei unabhängigen Variablen.

Dazu definieren wir für beide *unabhängige* Variable die Differentiale dx und dy durch

$$dx \equiv \Delta x \quad \text{und} \quad dy \equiv \Delta y.$$

Für die *abhängige* Variable ist die Differenz der Funktionswerte

$$\Delta f = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Für die Tangentialebene anstelle der Funktion selbst entspricht diese Differenz dem *vollständigen* oder *totalen*, aus zwei Beiträgen zusammengesetzten *Differential*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = \text{grad } f \cdot d\vec{r}.$$

Der Unterschied $\Delta f - df$ ist, geometrisch gesprochen, der vertikale Abstand zwischen der Fläche und der Tangentialebene, die die Fläche im Punkt $P(x, y)$ approximiert.

Gegenüber der Situation mit einer unabhängigen Variablen entsteht hier eine neue Frage, nämlich: Wann ist ein Differential $A(x, y) dx + B(x, y) dy$ vollständig? Ein Vergleich mit dem vollständigen Differential df ergibt: Ein Differential ist vollständig, wenn eine Funktion $f(x, y)$ existiert, so daß

$$A(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{und} \quad B(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Aus dem Satz über die Vertauschbarkeit der gemischten zweiten partiellen Ableitungen ergibt sich daraus die *Integrabilitätsbedingung*

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x},$$

die sich überprüfen läßt, ohne die Funktion $f(x, y)$ zu kennen.

Das gleiche Kriterium hat darüber entschieden, ob ein vorgegebener Vektor als Gradient einer skalaren Funktion geschrieben werden kann. Mit anderen als den räumlichen Variablen definiert in der Thermodynamik diese Bedingung den Unterschied zwischen Zustands- und Prozeßgrößen.

Wir gehen hier nicht der Frage nach, wie man die Funktion $f(x, y)$ bestimmt, falls die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist.

6.4. Beispiele

a) Wir berechnen den Gradienten der Funktion

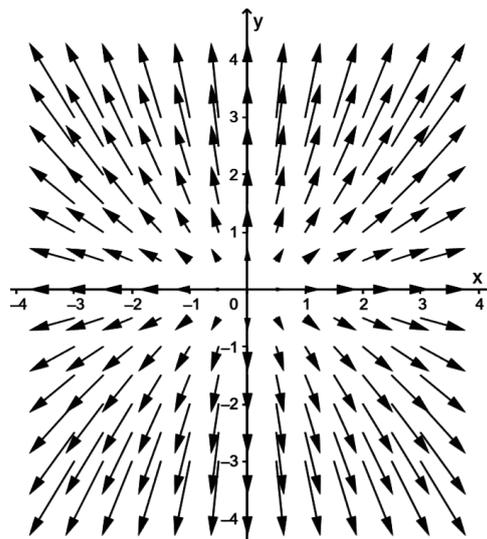
$$z = f(x, y) = \frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{6}$$

und erhalten

$$\text{grad } f = \frac{x}{5}\vec{i} + \frac{y}{3}\vec{j}$$

Anschaulich ist $z = f(x, y)$ ein nach oben geöffnetes, elliptisches Paraboloid. Wir berechnen das *Gradientenfeld* für diskrete Punkte, z.B.

$$\begin{aligned} \text{grad } f|_{(0,0)} &= \vec{0} \\ \text{grad } f|_{(x,0)} &= \frac{x}{5}\vec{i} \\ \text{grad } f|_{(0,y)} &= \frac{y}{3}\vec{j} \\ \text{grad } f|_{(1,1)} &= \frac{1}{5}\vec{i} + \frac{1}{3}\vec{j}. \end{aligned}$$



Das Gradientenfeld $\text{grad } f = \frac{x}{5}\vec{i} + \frac{y}{3}\vec{j}$

b) Wir fragen, ob der Vektor

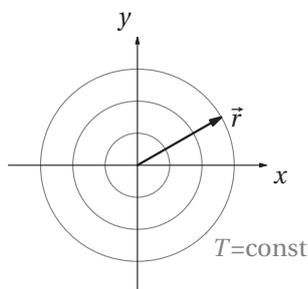
$$\vec{v} = \frac{y}{2}\vec{i} - \frac{x}{2}\vec{j}$$

ein Gradient ist. Die Antwort lautet „nein“, denn es ist

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2} \right) = \frac{1}{2}, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

c) Die Temperatur auf einer Herdplatte sei für $x, y \neq 0$ durch

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{T_0}{r}$$



gegeben. Wir stellen die Frage: In welcher Richtung muss ein Käfer^a laufen, damit er der Hitze am raschesten entkommt? Die erwartete Antwort ist „radial vom Zentrum weg“.

^aUm nicht einmal in Gedanken einem Tier wehzutun, stellen wir uns einen Roboter in Käfergestalt vor.

Es ist

$$\text{grad } T = -\frac{T_0}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j}) = -\frac{T_0}{r^3}\vec{r}$$

die Richtung des steilsten Temperaturanstiegs. Somit ist die Richtung des steilsten Abfalls

$$-\text{grad } T \propto \vec{r}.$$

- d) Um ein Beispiel für die *Reisegleichung* zu geben, stellen wir uns das folgende Szenario vor: In dem leeren Raum unter einer Planetariumskuppel fahren wir in einem Autoscooter, wobei der Stromabnehmer die Kuppel dauernd von innen berühren soll. Dann ist die Frage: Welche *Änderung* der Länge h des Stromabnehmers findet zu einer bestimmten Zeit während seiner Bewegung statt?

Die Planetariumskuppel beschreiben wir als die Halbkugel

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad z \geq 0.$$

Die Höhe, bis zu der der Stromabnehmer ausfährt, ist

$$h = z(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}.$$

Die Höhenlinien $h = h_0 = \text{const}$ sind Kreise

$$x^2 + y^2 = R^2 - h_0^2, \quad h_0 \leq R.$$

Wir haben nun nach der Reisegleichung

$$\frac{dh}{dt} = \vec{v} \cdot \text{grad } h$$

zu berechnen.

- Der Gradient

$$\text{grad } h = \frac{-2x\vec{i} - 2y\vec{j}}{2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} = -\frac{x\vec{i} + y\vec{j}}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}$$

zeigt an, daß in jedem Punkt innerhalb der kreisförmigen Berandung der Kuppel in der (x, y) -Ebene die Richtung des steilsten Anstiegs der Kuppel die radiale Richtung auf den Mittelpunkt zu ist.

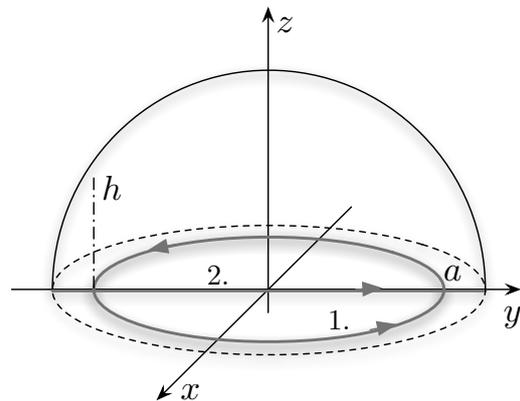
- Der **erste Weg** soll auf einer in die Ebene projizierten Höhenlinie entlangführen, also auf einem Kreis mit dem Radius $a < R$. Dieser Kreis soll mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\omega = \text{const}$ durchfahren werden. Wir erwarten, daß sich die Höhe nicht ändert, also $\frac{dh}{dt} = 0$ herauskommt.

Eine *Parametrisierung* dieses Weges ist

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = a \cos \omega t \cdot \vec{i} + a \sin \omega t \cdot \vec{j}$$

mit der zugehörigen Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = -a\omega \sin \omega t \cdot \vec{i} + a\omega \cos \omega t \cdot \vec{j}.$$



Damit ist

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \vec{v} \cdot \text{grad } h = -\frac{-a\omega \sin \omega t \cdot a \cos \omega t + a\omega \cos \omega t \cdot a \sin \omega t}{\sqrt{R^2 - a^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}} \\ &= \frac{a^2\omega}{\sqrt{R^2 - a^2}}(\sin \omega t \cos \omega t - \cos \omega t \sin \omega t) = 0 \end{aligned}$$

das erwartete Ergebnis.

- Auf dem **zweiten Weg** soll der Autoscooter den Durchmesser der Halbkugel entlang der x -Achse mit der konstanten Geschwindigkeit v_0 durchfahren. Er soll sich also in Richtung des steilsten Anstiegs und Abfalls bewegen. Eine Parametrisierung dieses Weges ist

$$x = 0, \quad y = v_0 t - R \quad \text{für} \quad 0 \leq t \leq \frac{2R}{v_0}$$

mit dem Vektor der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0 \vec{j}$, ($v_0 = \text{const}$). Damit ist

$$\frac{dh}{dt} = \vec{v} \cdot \text{grad } h = -\frac{v_0 y}{\sqrt{R^2 - y^2}} = -\frac{v_0(v_0 t - R)}{\sqrt{R^2 - (v_0^2 t^2 - 2v_0 R t + R^2)}}.$$

Die Höhenänderung für den zweiten Weg ist also

$$\frac{dh}{dt} = \frac{v_0(R - v_0 t)}{\sqrt{v_0 t(2R - v_0 t)}},$$

und damit für spezielle Werte von t :

$$\begin{aligned} t = 0, \quad t = \frac{2R}{v_0} : \quad \left| \frac{dh}{dt} \right| &\rightarrow \infty, \quad (\text{Rand der Halbkugel}) \\ t = \frac{R}{v_0} : \quad \frac{dh}{dt} &= 0, \quad (\text{Mittelpunkt der Halbkugel}) \\ t \leq \frac{R}{v_0} : \quad \frac{dh}{dt} &\geq 0. \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß in der ersten Hälfte der Bewegung die Länge des Stromabnehmers zunimmt, in der zweiten Hälfte abnimmt. Beim Überfahren des Mittelpunktes der kreisförmigen Bodenfläche ist die Höhenänderung stationär; die Länge des Stromabnehmers erreicht ihr Maximum. Daß am Anfang und am Ende der Bewegung formal „Unendlich“ herauskommt, liegt daran, daß wir die Bewegung direkt auf dem Rand der Halbkugel beginnen und enden lassen wollten, wo der Stromabnehmer nur die Länge Null haben kann.

Es ist lehrreich, das letztgenannte Beispiel noch einmal zu durchdenken, und zwar mit der Vorstellung, daß ein Kletterer sich außen auf der Planetariumskuppel bewegt, als ob diese ein besonders einfach geformtes Gebirge wäre. Der Kletterer möge nun, an irgendeinem Punkt auf der Kuppel stehend, nach der Richtung des steilsten Anstiegs fragen. Der Gradient bleibt unverändert, denn er ist ja eine Eigenschaft der Kuppel. Er ist ein *zweidimensionaler* Vektor, der – wie die waagrecht gehaltene Kompaßnadel – dem Kletterer sagt, daß er in Richtung des Mittelpunktes des „Breitenkreises“ gehen soll, auf dem er gerade steht.

Unter der Kuppel in der „Äquatorebene“ mit dem Autoscooter fahrend, konnten wir dieser Vorschrift folgen. Wir könnten ihr auch folgen, wenn das „Gebirge“ ein Temperaturgebirge wäre.

In der Situation des Kletterers ist der Weg in der Ebene des Breitenkreises aber durch die Kuppel versperrt. Daher muß der Kletterer „bergauf“ gehen. Wenn er nach einem Schritt die gleiche Frage wieder stellt, wird er im Fall der halbkugelförmigen Kuppel die gleiche Antwort erhalten, so daß er Schritt für Schritt auf einem „Längenkreis“ zum „Nordpol“ schreitet. Das bedeutet jedoch nicht, daß der Gradient nun „bergauf“ zeigt; er bleibt ein zweidimensionaler Vektor in der (x, y) -Ebene.

Will der Kletterer gar nicht auf- oder absteigen, wird er sich erinnern, daß die Höhenlinien senkrecht zum Gradienten verlaufen. Er wird auf einem Breitenkreis wandern.

6.5. Der Gradient in drei Dimensionen

Bisher betrachteten wir die Fläche $z = f(x, y)$ und den Gradienten

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j},$$

der senkrecht auf den Niveaulinien $f(x, y) = \text{const}$ steht. Nun definieren wir die von x , y und z abhängige Funktion

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

und fassen auch z als unabhängige Variable auf. Die Bedingung $g(x, y, z) = 0$ bringt uns auf die ursprüngliche Fläche zurück. Die Funktion $g(x, y, z)$ hat den Gradienten

$$\text{grad } g = \frac{\partial g}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z} \vec{k} = -\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \vec{k}.$$

Ein Vergleich mit dem Normalenvektor einer Tangentialebene ergibt

$$\vec{n} = \text{grad } g,$$

und die Gleichung der Tangentialebene ist

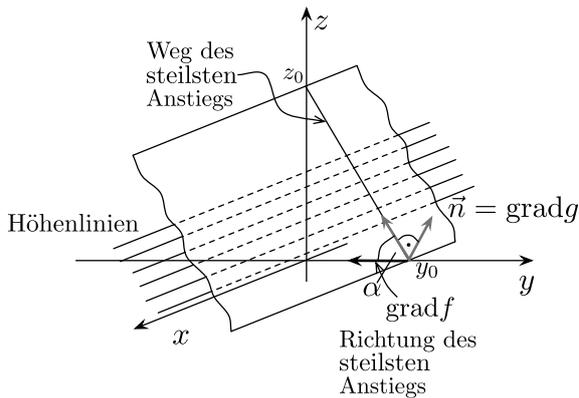
$$(\vec{r} - \vec{r}_0) \cdot \text{grad } g = 0.$$

Der dreidimensionale Vektor $\text{grad } g$ steht also senkrecht auf Niveauflächen $g(x, y, z) = \text{const}$ so, wie der zweidimensionale Vektor $\text{grad } f$ senkrecht auf Niveaulinien $f(x, y) = \text{const}$ steht. Es besteht der Zusammenhang

$$\text{grad } g = -\text{grad } f + \vec{k}.$$

Beispiel „Schiefe Ebene“ Das Beispiel der schiefen Ebene soll den soeben gefundenen Zusammenhang zwischen den Gradienten in zwei und drei Dimensionen illustrieren.

Wir legen die Ebene so, daß sie die x -Achse nicht schneidet.



Die Achsenabschnittsgleichung dieser Ebene ist dann für alle x

$$\frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = 1.$$

Das ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned} z = f(x, y) &= -\frac{z_0}{y_0}y + z_0 \\ &= -\tan \alpha \cdot y + z_0. \end{aligned}$$

Der Gradient

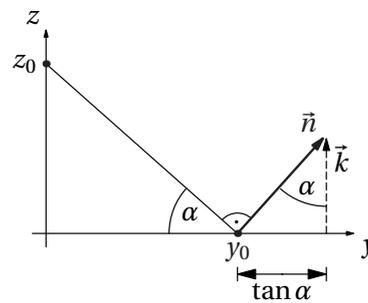
$$\text{grad } f = -\tan \alpha \cdot \vec{j}$$

ist unabhängig von x und y , was für die Ebene nicht anders zu erwarten war. Er steht senkrecht auf den Höhenlinien, die parallel zur x -Achse verlaufen.

Aus $g(x, y, z) = z - f(x, y) = z - z_0 + \tan \alpha \cdot y$ erhalten wir

$$\vec{n} = \text{grad } g = \tan \alpha \cdot \vec{j} + \vec{k},$$

was wiederum unabhängig von x und y ist. Der Vektor $\text{grad } g$ ist der Normalenvektor der schiefen Ebene $g(x, y, z) = 0$ und damit aller parallel verschobenen Ebenen $g(x, y, z) = \text{const}$.



Für die Physik wichtige Gradienten: Besonders im Zusammenhang mit dem Coulomb-Gesetz der Elektrostatik und dem Newtonschen Gravitationsgesetz treten die beiden nachfolgenden Gradienten sehr häufig auf.

a)

$$\begin{aligned} \text{grad } r &= \text{grad } \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ &= \frac{1}{r}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{\vec{r}}{r}, \quad |\text{grad } r| = 1 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \text{grad } \frac{1}{r} &= \text{grad } \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ &= -\frac{1}{r^3}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = -\frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{1}{r^2} \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right), \quad \left| \text{grad } \frac{1}{r} \right| = \frac{1}{r^2} \end{aligned}$$

7. Rechnen mit kleinen Größen

Das Rechnen mit kleinen Größen spielt in der Physik u.a. wegen der begrenzten Meßgenauigkeit in der Fehlerrechnung eine Rolle. Mindestens ebenso wichtig und interessant ist aber das Verhältnis von Theorien zueinander. So ist die klassische Mechanik der Grenzfall der Speziellen Relativitätstheorie, wenn die Geschwindigkeit v klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit c ist ($(v/c) \ll 1$), und wenn es in der Quantenmechanik um Drehbewegungen geht, ist sie Theorie kleiner Drehimpulse. In diesen Fällen sind *Näherungsformeln* interessant und oft ausreichend, wobei es von den Bedingungen der Aufgabe abhängt, welches dimensionslose Verhältnis wir als „klein gegen Eins“ ansehen wollen.

7.1. Vorbereitende Beispiele

In der Speziellen Relativitätstheorie treten typischerweise die Lorentz-Faktoren

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

auf. Können wir Näherungsausdrücke für die Wurzeln finden, wenn $(v/c) \ll 1$ ist? So beträgt beispielsweise die Bahngeschwindigkeit der Erde um die Sonne $v = 30 \text{ km/s}$ und das Verhältnis

$$\frac{v}{c} = 10^{-4} \ll 1$$

kann sehr oft als klein gegen Eins angenommen werden.

Beginnen wir zunächst mit *binomischen Ausdrücken*, wobei $x \ll 1$ sein soll, z.B. $x = \frac{v^2}{c^2}$.

a) In dem binomischen Ausdruck

$$(1 \pm x)^2 = 1 \pm 2x + x^2$$

ist x^2 der kleinste der drei Summanden, den wir nun gegenüber den beiden anderen vernachlässigen wollen. Dann erhalten wir die Näherungsformel

$$(1 \pm x)^2 \approx 1 \pm 2x.$$

(Beispiel: $x = 10^{-4}$, also $x^2 = 10^{-8} \ll 2x$)

b) Um die entsprechende Formel für $\sqrt{1 \pm x}$ zu finden, setzen wir $\sqrt{1 \pm x} \equiv y$, also $y^2 = 1 \pm x$. Mit der gleichen Berechtigung, mit der wir soeben das quadratische Glied weggelassen haben, fügen wir es nun als *quadratische Ergänzung* hinzu,

$$y^2 \approx 1 \pm x + \frac{x^2}{4} = \left(1 \pm \frac{x}{2}\right)^2.$$

Wir erhalten damit zunächst

$$y \approx 1 \pm \frac{x}{2}$$

und schließlich die Näherungsformel

$$\sqrt{1 \pm x} \approx 1 \pm \frac{x}{2}.$$

c) Den Näherungsausdruck für $\frac{1}{1 \pm x}$ finden wir durch *Polynomdivision*. Diese ergibt

$$\begin{array}{r} 1 : (1 \pm x) = 1 \mp x + x^2 \mp \dots \\ \underline{-(1 \pm x)} \\ \mp x \\ \underline{-(\mp x - x^2)} \\ x^2 \\ \vdots \end{array}$$

Bei Beschränkung auf Terme, die in x linear sind, erhalten wir die Näherungsformel

$$\frac{1}{1 \pm x} \approx 1 \mp x.$$

d) Zur näherungsweise Berechnung von $\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}}$ schreiben wir mit dem oben definierten y

$$\frac{1}{\sqrt{1 \pm x}} = \frac{1}{y} \stackrel{\text{nach b)}}{\approx} \frac{1}{1 \pm \frac{x}{2}} \stackrel{\text{nach c)}}{\approx} 1 \mp \frac{x}{2}.$$

Die Ergebnisse a) ... d) können wir in der einen Näherungsformel

$$(1 \pm x)^n \approx 1 \pm nx \quad \text{für } n = -1, 2, \pm \frac{1}{2}$$

zusammenfassen. Dieses Ergebnis ist nicht auf die genannten Exponenten beschränkt. Für die Lorentz-Faktoren haben wir schließlich

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Es stellt sich nun die Frage, ob es unabhängig von binomischen Ausdrücken ein allgemeines Verfahren gibt, das für eine gegebene Funktion $f(x)$ eine Näherungsformel liefert.

7.2. Taylor-Reihen und Taylor-Polynome

Wir machen für eine Funktion $f(x)$, die stetig und beliebig oft differenzierbar ist, also weder „Sprungstellen“ noch „Knickstellen“ hat, den *Potenzreihenansatz*

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$$

In einem der Einführungsbeispiele haben wir für $f(x) = \sqrt{1-x}$: $a_0 = 1, a_1 = -\frac{1}{2}$.

Wir bestimmen nun die *Entwicklungskoeffizienten* a_i wie folgt:

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + \dots$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3 a_3x + 3 \cdot 4 a_4x^2 + \dots$$

$$f'''(x) = 2 \cdot 3 a_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 a_4x + \dots$$

⋮

Für $x = 0$ lesen wir $f(0) = a_0, f'(0) = a_1, f''(0) = 2a_2, f'''(0) = 2 \cdot 3a_3$ usw. ab. Die allgemeine Bildungsvorschrift lautet demnach

$$f^{(n)}(0) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n \cdot a_n = n! \cdot a_n.$$

Für die Entwicklungskoeffizienten haben wir also

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

gefunden, so daß unser Potenzreihenansatz in

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

übergeht.

Anmerkungen Wir kommentieren dieses Ergebnis mit einigen Anmerkungen.

- Mit dem allgemeinen Potenzreihenansatz

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots$$

ergeben sich die Koeffizienten nach dem gleichen Verfahren zu

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0).$$

Damit ist

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

Diese Entwicklung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 in eine Potenzreihe heißt *Taylor-Reihe*.¹ Bricht die Taylor-Reihe bei einer Potenz mit dem Exponenten n ab, geht sie in ein *Taylor-Polynom* n -ten Grades über.

- Ein Konvergenzbeweis wurde hier nicht geführt. Es ist zu beweisen, daß die Taylor-Reihe eine Funktion $f(x)$ wirklich darstellt (Restgliedabschätzung).
- Den Unterschied zwischen Differenzen und Differentialen können wir nun mit $\Delta x \equiv (x - x_0)$ quantitativ in der Form

$$\Delta f = df + \frac{1}{2}f''(x_0) \cdot (\Delta x)^2 + \frac{1}{6}f'''(x_0) \cdot (\Delta x)^3 + \dots$$

fassen, wobei anstelle von Δx auch dx geschrieben werden darf.

- Das Taylor-Polynom 1. Ordnung

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ist die *lineare Approximation* von $f(x)$ an der Stelle x_0 , geometrisch gesehen die Gleichung der Tangente in x_0 .

- Das Taylor-Polynom 2. Ordnung,

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2,$$

ist im Falle eines Extremums, wo $f'(x_0) = 0$ gilt, die Approximation von $f(x)$ in x_0 durch eine *Parabel*. Für $f''(x_0) > 0$ ist die Parabel nach oben geöffnet; es liegt ein *Minimum* vor. Für $f''(x_0) < 0$ ist die Parabel nach unten geöffnet; es liegt ein *Maximum* vor.

7.3. Die Kleinwinkel-Näherung und nochmals zur Eulerschen

Formel

1. Schritt: MacLaurin-Reihe für $f(x) = \sin x$

Wir entwickeln die Sinus-Funktion an der Stelle $x = 0$ in eine Potenzreihe,

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos x, & f'(0) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin x, & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos x, & f'''(0) &= -1 \\ & & & \vdots \end{aligned}$$

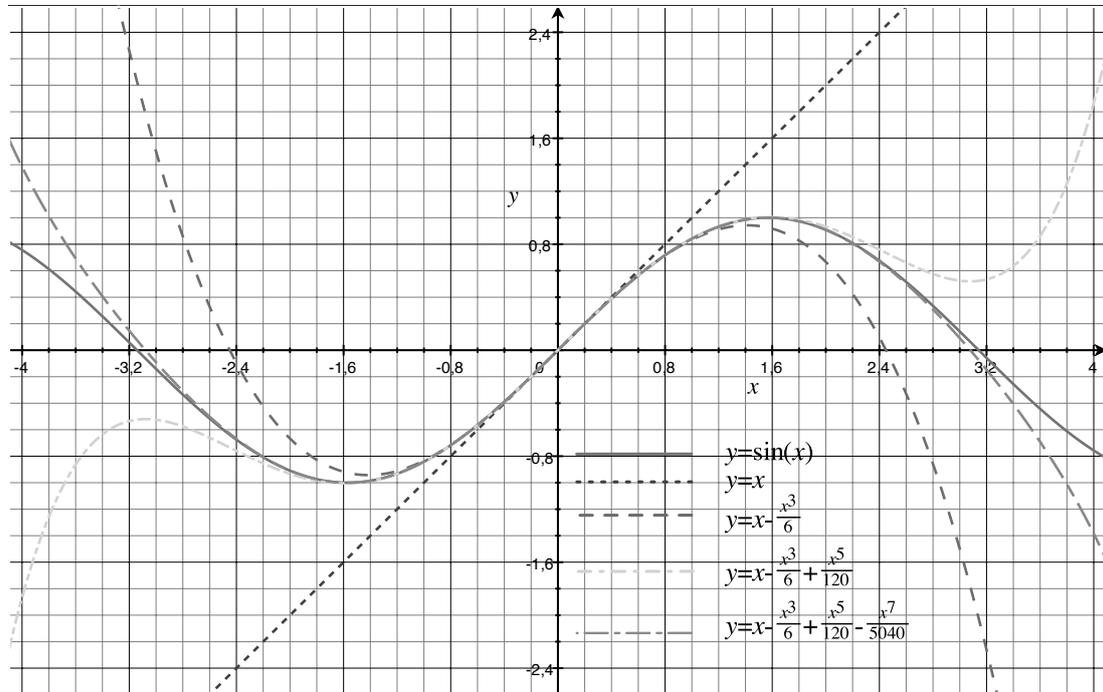
und erhalten

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots}$$

¹Die Taylor-Reihe für $x_0 = 0$ wird oft, aber nicht konsequent, als MacLaurin-Reihe bezeichnet.

Das Ergebnis enthält nur ungerade Potenzen von x , wie es auch sein muß, da die Sinus-Funktion eine ungerade Funktion ist.

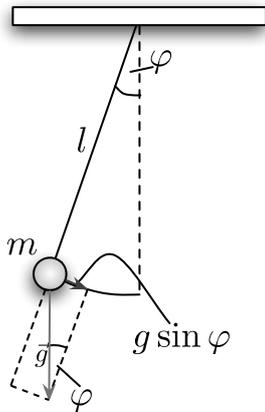
Der erste Summand für sich genommen ist die Tangente der Sinus-Funktion bei $x = 0$, eine Ursprungsgerade mit dem Anstieg 1 (Anstiegswinkel 45°).



Taylor-Polynome der Sinus-Funktion

Physikalische Anwendung: Fadenpendel Wir erklären hier die Bedeutung kleiner Ausschläge für die Lösung des Bewegungsproblems beim Fadenpendel.

- Die Bewegungsgleichung ergibt sich aus $lm\ddot{\varphi} = -mg \sin \varphi$ zu



$$l\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0.$$

Das ist eine nichtlineare Differentialgleichung 2. Ordnung, da sie die Sinus-Funktion enthält. Sie ist nicht leicht zu lösen.

- In linearer Näherung der Sinus-Funktion (kleine Ausschläge),

$$\sin \varphi \approx \varphi,$$

entsteht die sehr leicht lösbare lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0.$$

Die Gleichung zu lösen bedeutet, die Antwort auf die Frage zu finden: Welche Funktion $\varphi(t)$ reproduziert sich bei zweimaliger Ableitung bis auf eine Konstante selbst. Wir befassen uns hier nicht mit der Lösung, sondern diskutieren, für welche Pendelausschläge die lineare Näherung gerechtfertigt ist. Dazu vergleichen wir für zwei Ausschläge den Winkel φ im Bogenmaß mit $\sin \varphi$,

$$\begin{aligned} \varphi = 5^\circ : \quad \varphi &= 0,08727; \quad \sin \varphi = 0,08716 \\ \varphi = 10^\circ : \quad \varphi &= 0,17453; \quad \sin \varphi = 0,17365. \end{aligned}$$

Wir erkennen, daß für Ausschläge von 5° drei Nachkomma-Stellen übereinstimmen, bei 10° nur noch zwei. Wir haben anhand einer konkreten Aufgabe zu entscheiden, was noch akzeptiert werden kann. Allgemein gilt die „Faustregel“, daß bis zu Ausschlägen von 5° die *Kleinwinkel-Näherung* anwendbar ist.

2. Schritt: MacLaurin-Reihe für $f(x) = \cos x$

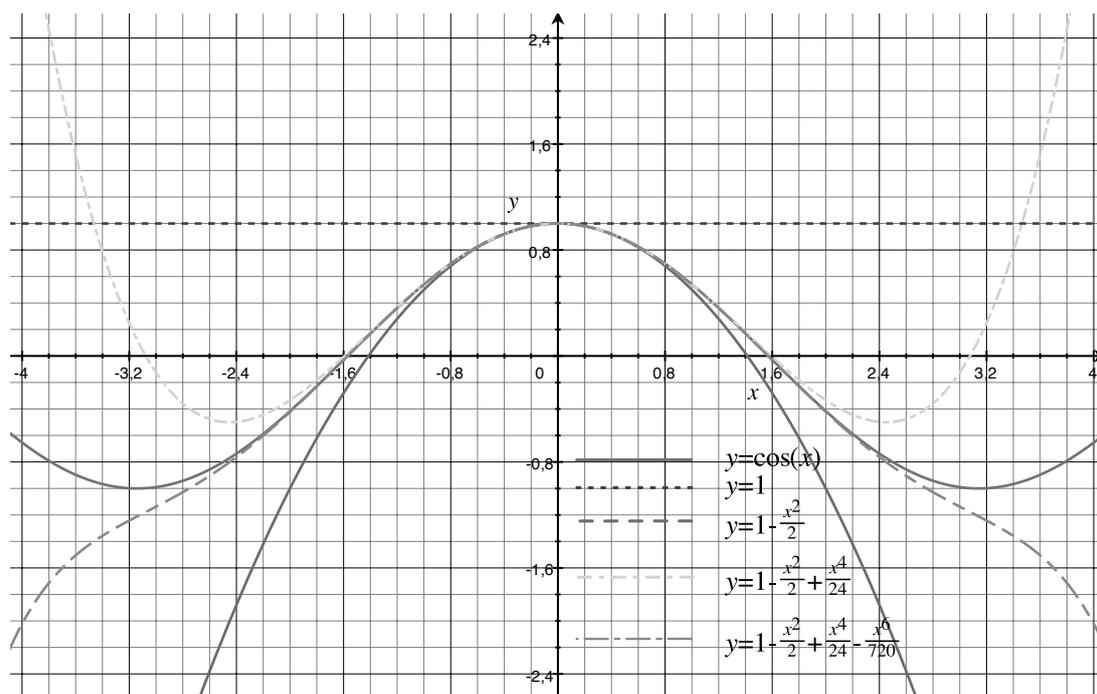
Die Reihenentwicklung für die Cosinus-Funktion ergibt sich über die Zwischenschritte

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos x, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin x, & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos x, & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin x, & f'''(0) &= 0 \\ & \vdots \end{aligned}$$

zu

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots}$$

Erwartungsgemäß kommen darin nur gerade x -Potenzen vor, da die Cosinus-Funktion eine gerade Funktion ist.



Taylor-Polynome der Cosinus-Funktion

Das Absolutglied beschreibt, für sich genommen, eine Parallele zur x -Achse bei $f(0) = 1$. Die Tangente an die Cosinus-Funktion verläuft bei $x = 0$ waagrecht; die Funktion hat dort ein Maximum. Dementsprechend beschreiben die ersten beiden Glieder der Reihenentwicklung zusammengenommen eine nach oben verschobene, nach unten geöffnete Parabel.

3. Schritt: MacLaurin-Reihe für $f(x) = e^x$

Die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion mit der Basis e gestaltet sich besonders einfach, da sich diese Funktion bei jedem Ableitungsschritt reproduziert. Wir haben

$$\begin{aligned} f(x) &= e^x, & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= e^x, & f'(0) &= 1 \\ & \vdots \end{aligned}$$

und erhalten

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

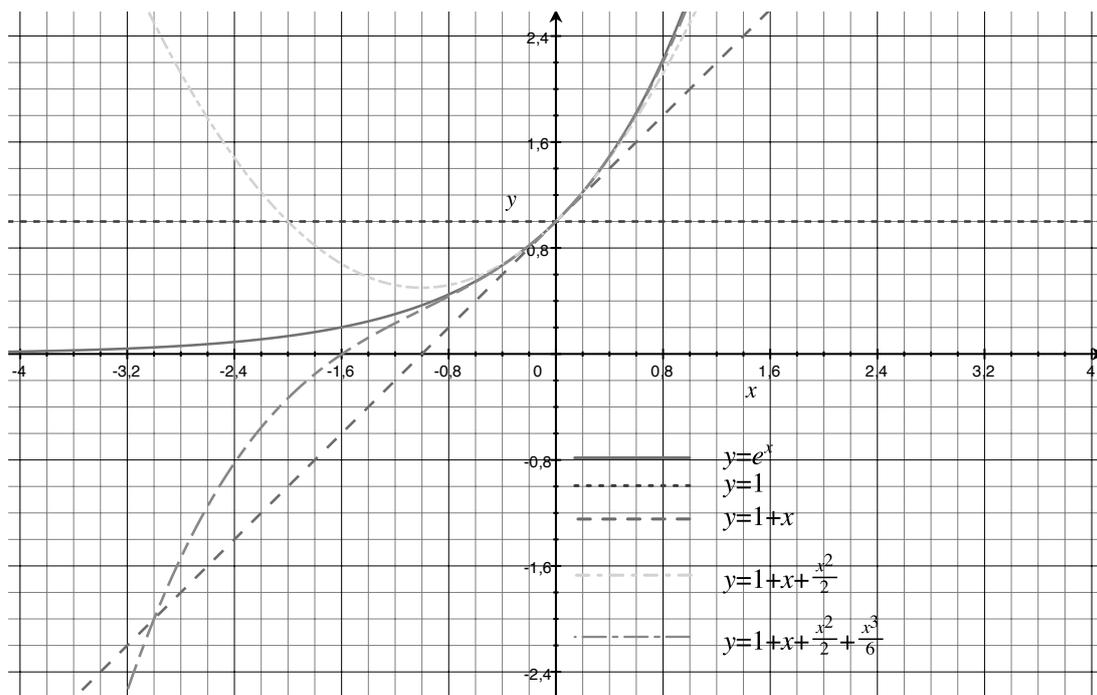
Dieses Mal kommen sowohl gerade als auch ungerade Exponenten vor; die Exponentialfunktion ist weder gerade noch ungerade.

Aus den ersten beiden Summanden der Reihe lässt sich die Gleichung der Tangente im Punkt $x = 0$ ablesen. Sie ist diejenige Gerade, die auf der Ordinate um eine Einheit nach oben verschoben ist und den Anstiegswinkel 45° hat.

4. Schritt: Eulersche Formel

Wir ersetzen $x \rightarrow ix$ mit $i^2 = -1$, $i^3 = -i$ usw. und erhalten

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}ix^3 + \dots$$



Taylor-Polynome der Exponential-Funktion

Nun fassen wir Real- und Imaginärteil für sich zusammen (Standard-Darstellung) und identifizieren die Reihenentwicklungen der Cosinus- bzw. Sinus-Funktion. Das Ergebnis ist die Eulersche Formel,

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots\right)}_{\cos x} + i \underbrace{\left(x - \frac{1}{6}x^3 + \dots\right)}_{\sin x} = \cos x + i \sin x.$$

7.4. Lineare Approximation und Fehlerfortpflanzung

a) **Eine Variable:** $y = f(x)$

Wir betrachten das Taylor-Polynom 1. Ordnung, d.h. die lineare Approximation

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

von $f(x)$ in x_0 . Die Ersetzung der Funktion durch ihre lineare Approximation ist gleichbedeutend mit $\Delta f = df$.

Wir schreiben statt $dy = f'(x_0) \cdot dx = f'(x_0) \cdot \Delta x$ auch $\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x$. Damit können wir abschätzen, welche Auswirkungen geringfügige Änderungen der unabhängigen Variablen („Fehler“) auf die abhängige Variable haben, also wie sich der Fehler Δx fortpflanzt. Dies ist die *Grundlage der Fehlerrechnung*.

Beispiel Das Volumen $V = \frac{4\pi}{3}r^3$ einer Kugel

Eine kleine Änderung Δr des Kugelradius' werde durch Wärmeausdehnung verursacht.

Hier sprechen wir natürlich nicht von einem „Fehler“, fragen aber nach der daraus resultierenden Volumenänderung. Es ist

$$\Delta V = \frac{dV}{dr} \Delta r = 4\pi r^2 \cdot \Delta r.$$

Dies ist das Produkt „(Kugeloberfläche) · (Dicke der Kugelschale)“, die wir uns bei der Vergrößerung $r \rightarrow r + \Delta r$ entstanden denken können, oder einfach „(Grundfläche) · (Höhe)“. In dimensionslosen, relativen Größen, bezogen auf Volumen und Radius, ist

$$\frac{\Delta V}{V} = 3 \cdot \frac{\Delta r}{r},$$

wonach die relative Volumenänderung um den Faktor 3 größer als die relative Radiusänderung ist. Dieser Faktor repräsentiert die drei Raumdimensionen.

b) **Zwei Variable:** $z = f(x, y)$

Die lineare Approximation (Gleichung der Tangentialebene) ist durch

$$z = z_0 + f_x(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + f_y(x_0, y_0) \cdot (y - y_0)$$

gegeben. Indem wir $\Delta f = df$ setzen, ersetzen wir die Funktion durch ihre lineare Approximation. Die Änderung

$$\Delta z = f_x(x_0, y_0) \cdot \Delta x + f_y(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

von z ergibt sich demnach durch einfache Addition der von x und y hervorgerufenen Änderungen.

Beispiel Messung der Schwerebeschleunigung g durch kleine Pendelschwingungen
Die Dauer von Pendelschwingungen mit *kleinen Ausschlägen* (siehe oben) ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}.$$

Daraus kann die Schwerebeschleunigung g durch Messung der Pendellänge ℓ und der Schwingungsdauer T bestimmt werden,

$$g = 4\pi^2 \frac{\ell}{T^2}.$$

Beide Messungen seien mit Fehlern $\Delta \ell$ und ΔT behaftet. Diese wirken sich auf die zu messende Schwerebeschleunigung gemäß

$$\Delta g = \frac{\partial g}{\partial \ell} \Delta \ell + \frac{\partial g}{\partial T} \Delta T = 4\pi^2 \left(\frac{1}{T^2} \Delta \ell - 2 \frac{\ell}{T^3} \Delta T \right) = g \left(\frac{\Delta \ell}{\ell} - 2 \frac{\Delta T}{T} \right)$$

aus.

Der relative *Größtfehler* (Betrag!) ist

$$\frac{\Delta g}{g} = \left| \frac{\Delta \ell}{\ell} \right| + 2 \left| \frac{\Delta T}{T} \right|.$$

Der Faktor 2 in diesem Ergebnis zeigt an, daß mehr Sorgfalt bei Zeitmessung als bei Längenmessung nötig ist.

8. Integralrechnung

Differenzieren ist ein Handwerk,
Integrieren eine Kunst.

UNBEKANNT

Gott kümmert sich nicht um unsere
mathematischen Schwierigkeiten. Er
integriert empirisch.

ALBERT EINSTEIN

8.1. Integration als Umkehrung der Differentiation.

Das unbestimmte Integral

Wir stellen eingangs die Frage: Was ist die Funktion $F(x)$, deren Ableitung $f(x) = F'(x)$ gegeben ist?

Beispiel Von welcher Funktion $F(x)$ ist $f(x) = x^4 + 6$ die Ableitung?
Aus der Differentialrechnung ist bekannt, daß die Ableitung von Potenzfunktionen den Exponenten um 1 erniedrigt. Unser erster Versuch auf der Basis dieser Regel ist

- Erster Summand:

$$\frac{d}{dx}x^5 = 5x^4.$$

Dieses Ergebnis ist um den Faktor 5 zu groß.

- Zweiter Summand:

$$\frac{d}{dx}6x = 6.$$

Die Funktion

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 6x$$

hat die vorgegebene Ableitung, denn es ist

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{5}x^5 + 6x \right) = x^4 + 6.$$

Sie ist aber *nicht eindeutig*, denn es darf eine Konstante $C = \text{const}$ additiv hinzugefügt werden, ohne daß dadurch die Ableitung wieder verfälscht wird. Die gesuchte Funktion ist also allgemein

$$F(x) = \frac{1}{5}x^5 + 6x + C.$$

Wir schreiben für diese Umkehroperation des Differenzierens ¹

$$\int f(x) \, dx = F(x) + C$$

und nennen dies das *unbestimmte Integral* der Funktion $f(x)$. $F(x)$ heißt *Stammfunktion* von $f(x)$. Es besteht der Zusammenhang

$$F'(x) = f(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx} \int f(x) \, dx = f(x).$$

Herkunft und Bedeutung dieser Symbolik werden im nächsten Abschnitt erläutert.

Wir können nun das Einführungsbeispiel verallgemeinern und mit Hilfe dieser Symbolik

$$\int x^n \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$$

schreiben, denn es ist

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + C \right) = \frac{1}{n+1} (n+1)x^{(n+1)-1} = x^n.$$

Weitere *Grundintegrale* lassen sich sofort angeben, indem wir die Tabelle mit den Ableitungen elementarer Grundfunktionen von rechts nach links lesen.

Beispiele

a)

$$\int e^x \, dx = e^x + C, \quad \text{denn:} \quad \frac{d}{dx} (e^x + C) = e^x$$

b)

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C, \quad \text{denn:} \quad \frac{d}{dx} (-\cos x + C) = -(-\sin x) = \sin x$$

c)

$$\int \frac{1}{x} \, dx = \ln |x| + C, \quad \text{denn:} \quad \frac{d}{dx} (\ln |x| + C) = \frac{1}{x}$$

d)

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + C, \quad \text{denn:} \quad \frac{d}{dx} (\tan x + C) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

¹Diese Umkehroperation wird in der englischsprachigen Literatur auch als „Anti-Differentiation“ bezeichnet.

e)

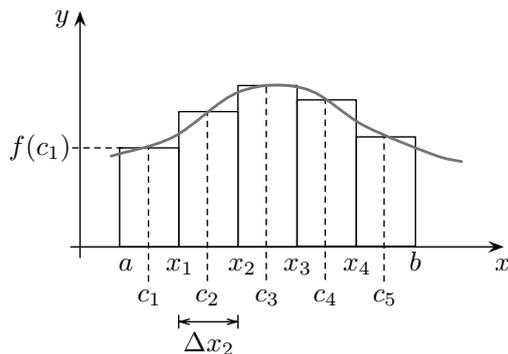
$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C, \quad \text{denn: } \frac{d}{dx}(\arcsin x + C) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Wegen des Zusammenhangs $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ kann das Ergebnis mit der neuen Konstanten $\tilde{C} = C + \frac{\pi}{2}$ auch in der Form $(-\arccos x + \tilde{C})$ geschrieben werden.

Auf diese Weise können wir jedoch z.B. $\int \tan x dx$ oder $\int \ln x dx$ nicht ablesen. Solche und viele andere Integrale müssen mit noch zu entwickelnden Methoden separat ausgerechnet werden.

8.2. Das bestimmte Integral

Wir behandeln in diesem Abschnitt den Riemannsches Integralbegriff. Dazu fragen wir nach dem Inhalt A der Fläche, die zwischen dem Graphen der Funktion $f(x)$ und der x -Achse liegt und von zwei Parallelen zur y -Achse bei $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird. Die Funktion $f(x)$ nähern wir durch eine Stufenfunktion an, so daß sie in Intervallen $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ Werte $f(c_i) = \text{const}$ hat, worin $x_{i-1} < c_i < x_i$ ist. Das bedeutet, daß die gesuchte Fläche durch Rechteckflächen angenähert wird.



$$x_0 = a, \quad x_n = b \\ \Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

Bei einer Unterteilung des Intervalls $[a, b]$ in n Intervalle Δx_i ist die Fläche angenähert

$$A_n \approx \sum_{i=1}^n f(c_i) \cdot \Delta x_i.$$

Dieser Flächeninhalt kommt dem eigentlich gesuchten umso näher, je feiner seine Unterteilung in Rechtecke ist. Existiert der Grenzwert

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta x_i \rightarrow 0)}} A_n,$$

ist

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \int_a^b f(x) dx.$$

Dann heißt die Funktion $f(x)$ *integrabel* (im Riemannsches Sinne).

Das Symbol

$$\int_a^b f(x) dx$$

heißt *bestimmtes Integral*. Es ist eine Zahl („Fläche“) und damit eindeutig bestimmt. Das bedeutet auch, daß die Integrationsvariable x eine „stumme Variable“ ist, da sie im Ergebnis nicht mehr vorkommt. Sie darf daher durch jedes andere Symbol ersetzt werden.

Nun wird auch die ebenfalls auf Leibniz zurückgehende *Formelsymbolik* der Integralrechnung

verständlich.² Es entsprechen

- dem Summenzeichen das Integralzeichen, das an ein langgestrecktes S für „Summe“ erinnern soll,
- dem kleinsten und dem größten Wert des Summationsindex' i die Integrationsgrenzen a und b ,
- dem Koordinatenintervall Δx_i das Differential dx , das einerseits angibt, bezüglich welcher Variablen integriert wird, und das andererseits für den Summationsindex i steht, denn es ist, sofern nicht anders angegeben,

$$\int_a^b f(x) dx \equiv \int_{x=a}^{x=b} f(x) dx,$$

- den stückweise konstanten Rechteckhöhen $f(c_i)$ die kontinuierliche Funktion $f(x)$, die wir die zu integrierende Funktion oder den Integranden nennen.

Bis hierher haben wir das Integralzeichen in zwei verschiedenen Zusammenhängen benutzt, die auf den ersten Blick nichts miteinander zu tun haben. Als unbestimmtes Integral stand es für die Berechnung der Stammfunktion, als bestimmtes Integral für die Berechnung eines Flächeninhalts, ohne daß dabei von der Stammfunktion überhaupt die Rede war. Diese unterschiedliche Verwendung des gleichen Symbols ist nun noch zu rechtfertigen. Dafür ziehen wir ein Beispiel aus der Physik heran.

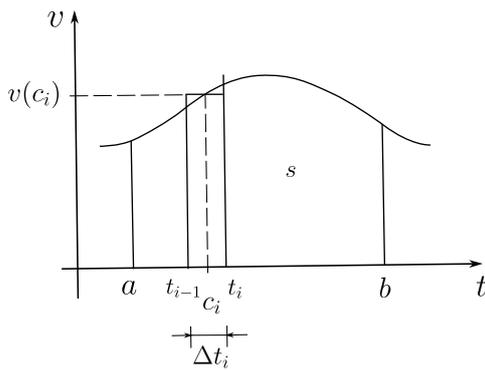
Zusammenhang zwischen bestimmten und unbestimmten Integralen Wir betrachten die eindimensionale *Bewegung auf einer geraden Linie*. Es seien $y(t) = F(t)$ der Ort und $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{dy}{dt} = f(t)$ die Geschwindigkeit zur Zeit t , also $\dot{F}(t) = f(t)$. Nun soll $y(t)$ aus $v(t)$ rekonstruiert werden. Da $F(t)$ die Stammfunktion von $f(t)$ ist, haben wir

$$y(t) = F(t) = \int f(t) dt.$$

Fand die Bewegung z.B. zwischen dem Anfangszeitpunkt $t_i = a$ und dem Endzeitpunkt $t_f = b$ statt, ist der zurückgelegte Weg $s = F(b) - F(a)$.³ Die in dem unbestimmten Integral enthaltene Konstante C fällt bei dieser Differenzbildung heraus, so daß das Resultat eindeutig ist.

²Manche Autoren schreiben $\int dx f(x)$. Wir bevorzugen jedoch die Schreibweise $\int f(x) dx$, da das Differential dx auch als Begrenzung dafür dient, was „unter dem Integral“ steht.

³Der Index i steht für „initial“, der Index f für „final“.



Andererseits können wir den Weg s auch als Flächeninhalt in einem t - v -Diagramm auffassen. Dann ergibt sich mit dem Riemannschen Integralbegriff aus

$$s_n \approx \sum_{i=1}^n v(c_i) \cdot \Delta t_i$$

der zurückgelegte Gesamtweg zu

$$s = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ (\Delta t_i \rightarrow 0)}} s_n = \int_a^b v(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

Anmerkung Der „zurückgelegte Gesamtweg“ ist die Entfernung zwischen dem Anfangs- und dem Endpunkt der Bewegung. Die wirklich durchfahrene Strecke kann durchaus länger sein, da zwischendurch eine Bewegungsumkehr stattgefunden haben kann. Dafür hätten wir $v(c_i)$ durch $|v(c_i)|$ zu ersetzen.

Als Resultat haben wir nun *unabhängig* voneinander

$$s = F(b) - F(a)$$

und

$$s = \int_a^b f(t) dt$$

erhalten. Im ersten Fall können wir den Gesamtweg s ausrechnen, sobald wir die Stammfunktion zu $f(t)$ kennen. Im zweiten Fall steht das Integral für einen Grenzwert. Wir haben zuerst die Summe der Teilwege und dann den Grenzwert $n \rightarrow \infty$ zu bilden. Nun kommt das entscheidende Argument: Da der zurückgelegte Weg s *eindeutig* ist, gilt mit $F'(x) = f(x)$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a).$$

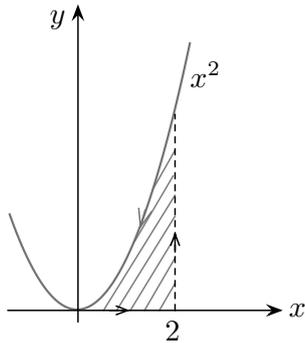
Dieser Zusammenhang zwischen Stammfunktion und bestimmtem Integral, den wir hier lediglich plausibel gemacht und nicht streng bewiesen haben, wird auch als *Fundamentalsatz der Integralrechnung* bezeichnet. Er ermöglicht es, die Berechnung bestimmter Integrale mit Hilfe der Stammfunktion auszuführen. Man schreibt auch

$$\boxed{\int_a^b f(x) dx = F(x)|_a^b \equiv F(b) - F(a)}.$$

Zwei Beispiele für Flächenberechnungen Wir berechnen den Inhalt zweier Flächen und lernen, daß Flächen vorzeichenbehaftet sind.⁴

⁴Wir geben hier nur die Maßzahlen der Flächen, nicht aber ihre Maßeinheiten an, da diese auch für die Koordinatenachsen nicht festgelegt wurden.

- a) Es soll die Größe der schraffierten Fläche berechnet werden.



Wir umfahren diese Fläche, an der unteren Grenze entlang der x -Achse beginnend, *entgegen* dem Uhrzeigersinn und erhalten

$$A = \int_0^2 x^2 \, dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Der Flächeninhalt ist positiv.

- b) Diese Fläche zerlegen wir in zwei Teilflächen. Jede der beiden Flächen umfahren wir wieder, beginnend entlang der x -Achse an der jeweils unteren Grenze. Dabei ergibt sich, daß eine Teilfläche *im*, die andere *entgegen* dem Uhrzeigersinn umfahren wird.

Die beiden Teilflächen von

$$A = \int_{-1/2}^1 x^3 \, dx$$

sind

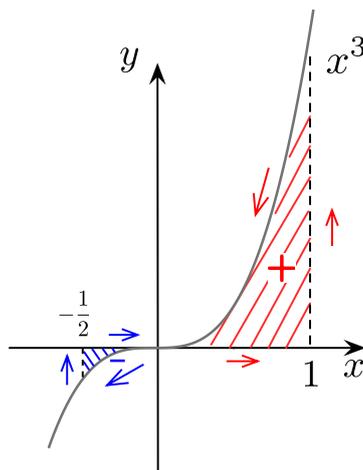
$$A_1 = \int_{-1/2}^0 x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_{-1/2}^0 = 0 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{16} = -\frac{1}{64}$$

und

$$A_2 = \int_0^1 x^3 \, dx = \frac{1}{4}x^4 \Big|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

Wir erkennen also, dass die im Uhrzeigersinn umfahrene Fläche mit einem negativen Vorzeichen behaftet ist. Der gesamte Flächeninhalt ergibt sich zu

$$A = |A_1| + A_2 = \frac{17}{64}.$$



8.3. Eigenschaften bestimmter Integrale

- a) *Eindeutigkeit*

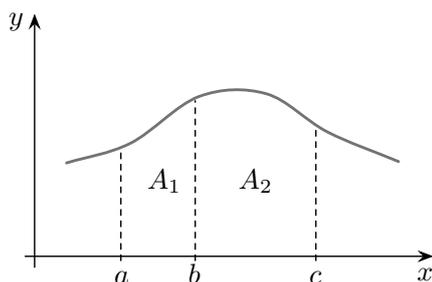
Es sei $F_1 = F_2 + C$, sodaß $F_1'(x) = F_2'(x) = f(x)$. Dann ist

$$F_1(b) - F_1(a) = [F_2(b) + C] - [F_2(a) + C] = F_2(b) - F_2(a).$$

b) Linearität

$$\begin{aligned}
 \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx &= [\alpha F(x) + \beta G(x)] \Big|_a^b \\
 &= [\alpha F(b) + \beta G(b)] - [\alpha F(a) + \beta G(a)] \\
 &= \alpha[F(b) - F(a)] + \beta[G(b) - G(a)] \\
 &= \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx
 \end{aligned}$$

c) Additivität der Integrationsgrenzen

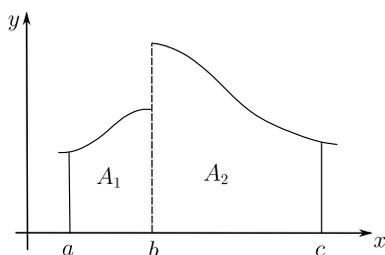


Es sei $a < b < c$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 \int_a^c f(x) dx &= \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \\
 &= A_1 + A_2,
 \end{aligned}$$

denn

$$[F(b) - F(a)] + [F(c) - F(b)] = F(c) - F(a).$$



Anmerkung: Die Bedingungen für Integrierbarkeit sind weniger einschränkend als jene für Differenzierbarkeit. So ist z.B. eine Flächenberechnung auch für Funktionen mit „Knick“- und „Sprung“-Stellen möglich.

d) Umkehrung des Integrationsweges

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx, \quad \text{denn } F(b) - F(a) = -[F(a) - F(b)]$$

Insbesondere ist $\int_a^a f(x) dx = 0$. Es wird keine Fläche aufgespannt, da die beiden Parallelen zur Ordinatenachse zusammenfallen.

e) Integration über ein zu Null symmetrisches Intervall

Mit Hilfe der bisher genannten Eigenschaften nehmen folgende Umformungen vor:

$$\begin{aligned}
 \int_{-a}^a f(x) \, dx &= \int_{-a}^0 f(x) \, dx + \int_0^a f(x) \, dx \\
 &= \int_{x=a}^0 f(-x) \, d(-x) + \int_0^a f(x) \, dx \\
 &= - \int_0^{x=a} f(-x) \, d(-x) + \int_0^a f(x) \, dx \\
 &= \int_0^a [f(-x) + f(x)] \, dx
 \end{aligned}$$

Damit haben wir die Integration über ein zu Null symmetrisches Intervall auf eine Integration über ein Intervall der halben Größe zurückgeführt. Zwei Spezialfälle sind besonders interessant:

- Der Integrand ist eine ungerade Funktion: $f(-x) = -f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0.$$

- Der Integrand ist eine gerade Funktion: $f(-x) = f(x)$

$$\int_{-a}^a f(x) \, dx = 2 \int_0^a f(x) \, dx.$$

8.4. Integrationstechniken I: Die Substitutionsmethode

Die Substitutionsmethode ist die *Integration der Kettenregel*

$$\frac{d}{dx} F[u(x)] = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Also ist $F[u(x)]$ die Stammfunktion zu $\frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx}$,

$$\int \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx} \, dx = F[u(x)] + C.$$

Schreiben wir $\frac{dF}{du} = f(u)$, sodaß $\int f(u) \, du = F(u) + C$ ist, dann ist

$$\boxed{\int f(u) \cdot \frac{du}{dx} \, dx = F(u) + C = \int f(u) \, du}.$$

Die Strategie bei der Berechnung eines Integrals nach dieser Methode ist also zu fragen:

Läßt sich im Integranden eine neue Variable $u = u(x)$ so einführen, dass die Ableitung $\frac{du}{dx}$ als Faktor zusammen mit einer Funktion $f(u)$ auftritt, deren Integral bekannt oder leichter bestimmbar ist?

Das ist im allgemeinen eine Sache der Erfahrung.

Beispiele

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1} dx$

- Wir substituieren $u = x^2 + 1$. Die Ableitung $\frac{du}{dx} = 2x$ kommt als Faktor im Integranden vor.
- Der andere Faktor ist $f(u) = \sqrt{u}$. Davon ist die Stammfunktion $F(u) = \frac{2}{3}u^{3/2}$ bekannt.
- Das Resultat ist nach Wiedereinführung der ursprünglichen Variablen x

$$\int 2x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C.$$

(Probe: Kettenregel)

b) Translation des Arguments, $x \rightarrow x+a$, ($a = \text{const}$): $\int f(x+a) dx$

- Wir substituieren $u = x+a$. Die Ableitung $\frac{du}{dx} = 1$ kommt als Faktor im Integranden vor.
- Der andere Faktor $f(u)$ habe die bekannte Stammfunktion $F(u)$.
- Resultat:

$$\int f(x+a) dx = F(x+a) + C.$$

c) Skalierung des Arguments, $x \rightarrow ax$, ($a = \text{const}$): $\int f(ax) dx$

- Wir substituieren $u = ax$. Die Ableitung $\frac{du}{dx} = a$ kommt zunächst nicht vor, kann aber durch Erweitern als Faktor erzeugt werden,

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a} \int a \cdot f(ax) dx.$$

- Der andere Faktor habe die bekannte Stammfunktion $F(u)$.
- Resultat:

$$\int f(ax) dx = \frac{1}{a}F(ax) + C.$$

Logarithmische Integration Wir behandeln nun als Spezialfall $f(u) = \frac{1}{u}$ die *Integration der logarithmischen Ableitung*. Mit der Kettenregel ist $\frac{d}{dx} \ln u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$ und damit

$$\boxed{\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C = \int \frac{du}{u}}.$$

Die Strategie ist zu fragen: Ist der Integrand so aufgebaut, daß im Zähler die Ableitung des Nenners steht?

Beispiele

$$a) \int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} \, dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} \, dx = -\ln |\cos x| + C$$

$$b) \int \cot x \, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \, dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} \, dx = \ln |\sin x| + C$$

Anmerkungen

1) Routinemäßiges Vorgehen bei der Anwendung der Substitutionsmethode:

Wir ersetzen in einem Integral $\int h(x) \, dx$ die Integrationsvariable x durch die neue Variable $u = g(x)$ und mit $du = g'(x) \, dx$ auch $dx = \frac{du}{g'(x)}$. Die Wahl der Variablen $u(x)$ war erfolgreich, wenn in dem neu entstandenen Integral

$$\int h(x) \, dx = \int \frac{h(x)}{g'(x)} \, du = \int f(u) \, du$$

die alte Variable x nicht mehr vorkommt und $\int f(u) \, du$ bekannt oder leichter lösbar ist.

Beispiel: $\int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} \, dx$

Wir substituieren $u = 1 + \ln x$, $du = \frac{1}{x} \, dx$. Damit wird

$$\int \frac{\sqrt{u}}{x} \cdot x \, du = \int \sqrt{u} \, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3} (1 + \ln x)^{3/2} + C.$$

2) *Integrationsgrenzen* bei der Substitution in bestimmten Integralen

Beispiel: $\int_0^{\pi/4} \cos 2x \, dx$

Wir substituieren $u = 2x$ und $dx = \frac{1}{2} \, du$. Bezüglich der Integrationsgrenzen haben wir zwei Möglichkeiten:

- Wir kehren nicht zur ursprünglichen Variablen x zurück und ersetzen die Integrationsgrenzen $x = 0$ durch $u = 0$ und $x = \frac{\pi}{4}$ durch $u = \frac{\pi}{2}$. Damit wird

$$\int_{x=0}^{x=\pi/4} \cos 2x \, dx = \int_{u=0}^{u=\pi/2} \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \sin u \Big|_{u=0}^{u=\pi/2} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

- Wir kehren zur ursprünglichen Variablen x zurück und ersetzen die Integrationsgrenzen nicht. Dann entsteht das gleiche Resultat durch

$$\int_{x=0}^{x=\pi/4} \cos u \frac{du}{2} = \frac{1}{2} \sin u \Big|_{x=0}^{x=\pi/4} = \frac{1}{2} \sin 2x \Big|_{x=0}^{x=\pi/4} = \frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}.$$

8.5. Integrationstechniken II: Partielle Integration

Die partielle Integration ist die *Integration der Produktregel* für zwei Funktionen $F = F(x)$ und $G = G(x)$,

$$(FG)' = F'G + FG'.$$

Also ist $F \cdot G$ eine *Stammfunktion* für $F'G + FG'$,

$$\int (F'G + FG') dx = F \cdot G + C,$$

$$\int FG' dx = FG - \int F'G dx.$$

Dabei haben wir eine Integrationskonstante C weggelassen, da das unbestimmte Integral auf der rechten Seite diese implizit enthält.

Die Strategie bei der Berechnung von Integralen ist also zu fragen:

Läßt sich der Integrand so als Produkt von $F(x)$ und $G'(x)$ schreiben, daß $G(x)$ bekannt ist und sich das Integral $\int F'G dx$ leichter lösen läßt?

Oft ist dies der Fall, wenn im Integranden trigonometrische, Exponential- und Logarithmusfunktionen vorkommen.

Mit der anderen Bezeichnung $F = u(x)$, $G = v(x)$ erhalten wir die geläufige Formulierung

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx \quad \text{oder} \quad \int u dv = uv - \int v du.$$

Beispiele

a) $\int x \cos x dx$

Wir wählen $u = x$ mit $\frac{du}{dx} = 1$ und $\frac{dv}{dx} = \cos x$ mit $v = \sin x$. Damit wird

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Wir sehen, daß der zweite Summand durch die partielle Integration nun wesentlich leichter zu integrieren war. Eine Probe ist mit der Produktregel möglich.

b) $\int \ln x dx$

Auf den ersten Blick ist der Integrand gar kein Produkt. Wir fügen aber den Faktor 1 hinzu,

$$\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx,$$

und wählen $u = \ln x$ mit $\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$ und $v' = 1$ mit $v = x$. Damit erhalten wir

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C.$$

Integration der Umkehrfunktion Nachdem wir die partielle Integration eingeführt haben, wollen wir sie auf die Integration mit Hilfe der Umkehrfunktion anwenden. Die Strategie ist dabei, die Integration einer Funktion auf die bereits bekannte oder leichter durchführbare Integration der Umkehrfunktion zurückzuführen.

Es sei $y = f(x)$ mit der Umkehrfunktion $y = g(x)$. Lösen wir $y = f(x)$ nach x auf, erhalten wir $x = g(y)$. Wir schreiben zunächst

$$\int f(x) dx = \int 1 \cdot f(x) dx$$

und wählen $u = f(x)$ mit $\frac{du}{dx} = f'(x)$ sowie $v' = 1$ mit $v = x$. Die partielle Integration ergibt

$$\int f(x) dx = x \cdot f(x) - \int \underbrace{x}_{g(y)} \cdot \underbrace{f'(x) dx}_{dy}.$$

Die Integration mit Hilfe der Umkehrfunktion ist also

$$\boxed{\int f(x) dx = x \cdot f(x) - \int g(y) dy \quad \text{oder} \quad \int y dx = xy - \int x dy}.$$

Beispiele

a) Nochmals $\int \ln x dx$.

Mit $y = f(x) = \ln x$ ist $x = g(y) = e^y$, und wir erhalten

$$\int \ln x dx = x \cdot \ln x - \int e^y dy = x \cdot \ln x - e^y + C = x \cdot \ln x - x + C.$$

Dabei haben wir im letzten Schritt die ursprüngliche Variable x wieder eingesetzt.

b) $\int \arccos x dx$

Mit $y = f(x) = \arccos x$ ist $x = g(y) = \cos y$ und damit

$$\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \int \cos y dy = x \cdot \arccos x - \sin y + C.$$

Um die ursprüngliche Variable x wieder einzuführen, benutzen wir

$$\sin y = \sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2},$$

haben also schließlich

$$\int \arccos x dx = x \cdot \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C.$$

8.6. Formelsammlung zur Integralrechnung

a) Eigenschaften von bestimmten Integralen

- Linearität

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- Additivität der Grenzen

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx, \quad (a < b < c)$$

- Umkehrung des Integrationsweges

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

b) Integrationsmethoden

- Substitution

$$\int f(u) \frac{du}{dx} dx = \int f(u) du, \quad (u = u(x))$$

Spezialfall: Logarithmische Integration

$$\int \frac{u'}{u} dx = \ln |u(x)| + C$$

- Partielle Integration

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx, \quad (u = u(x), \quad v = v(x))$$

Spezialfall: $y = g(x)$ als Umkehrfunktion von $y = f(x)$

$$\int f(x) dx = xf(x) - \int g(y) dy$$

c) Integration elementarer Grundfunktionen

(Zu jeder Stammfunktion $F(x)$ kann eine Konstante C addiert werden.)

Aus Tabelle „Ableitung elementarer Grundfunktionen“ direkt ablesbar:

Mit den Integrationsmethoden bestimmt:

$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}, \quad (n \neq -1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln x $
e^x	e^x
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\cot x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccot} x$

$f(x)$	$F(x)$
$\ln x$	$x(\ln x - 1)$
$\log_a x$	$\frac{x}{\ln a}(\ln x - 1)$
$\tan x$	$-\ln \cos x $
$\cot x$	$\ln \sin x $
$\arcsin x$	$x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$
$\arccos x$	$x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$
$\arctan x$	$x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$
$\operatorname{arccot} x$	$x \operatorname{arccot} x + \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$

8.7. Zusätzlicher Inhalt: Summen und Integrale – Das

Cavalierische Prinzip

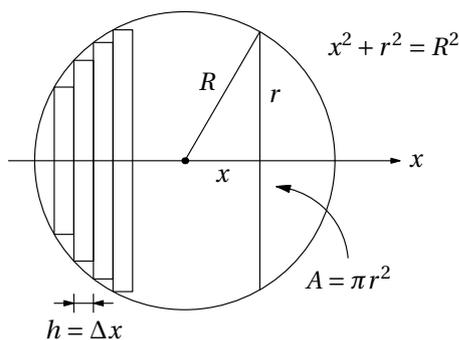
Das Kugelvolumen Wir nehmen uns vor, die Größe des von einer Kugel umschlossenen Volumens, das wir – wie üblich – einfach „Kugelvolumen“ nennen werden, zu berechnen. Dies geschieht nicht um des allseits bekannten Ergebnisses willen; es geht um den Methodenvergleich.

Unserem Verfahren liegt das Cavalierische Prinzip zugrunde, welches besagt: Zerschneidet man zwei Körper mit Hilfe paralleler Ebenen, sodaß einander entsprechende Schnitte den gleichen Flächeninhalt haben, so sind auch die Volumina der beiden Körper gleich.

Wir berechnen das Volumen der Kugel aus den Volumina übereinandergestapelter dünner Kreisscheiben (Zylinder), die das Kugelvolumen näherungsweise ausfüllen. Dabei setzen wir den Flächeninhalt $A = \pi r^2$ eines Kreises mit dem Radius r als bekannt voraus. Das Volumen einer Kreisscheibe mit dem Radius r_k und der Höhe $h = \Delta x$ ist

$$V_k = \pi r_k^2 \cdot \Delta x.$$

Denken wir uns nun die halbe Kugel mit dem Radius R aus n Kreisscheiben zusammengesetzt, so ist



Seitenansicht der Kreisscheiben

$$\Delta x = x_k - x_{k-1} = \frac{R}{n}$$

Mit $R^2 = x_k^2 + r_k^2$ und $x_k = k \cdot \Delta x$ wird

$$r_k^2 = R^2 \left[1 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right]$$

und

$$V_k = \pi R^3 \cdot \frac{1}{n} \left[1 - \left(\frac{k}{n} \right)^2 \right]$$

Das Gesamtvolumen der n Kreisscheiben ist dann

$$\begin{aligned} V_n &= \pi R^3 \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k^2}{n^2} \right) \\ &= \pi R^3 \frac{1}{n} \left[\sum_{k=1}^n 1 - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k^2 \right] \end{aligned}$$

Es ist

$$\sum_{k=1}^n 1 = \underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n \text{ Summanden}} = n$$

und

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

Diese Summenformel für die Quadratzahlen ist zunächst nicht offensichtlich. Sie kann aber durch vollständige Induktion bewiesen werden (Übungsaufgabe). Damit wird

$$V_n = \pi R^3 \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2n} - \frac{1}{n^2} \right)$$

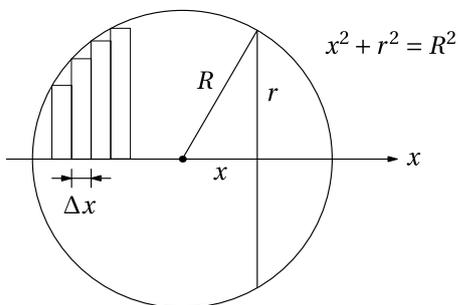
Das Volumen der Kugel wird durch das Volumen der Kreisscheiben umso genauer approximiert, je kleiner deren Höhe Δx (je größer deren Anzahl n) ist. Das Volumen der ganzen Kugel (Faktor 2) ist

$$V_{\text{Kugel}} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \frac{4\pi}{3} R^3$$

Mit den Methoden der Integralrechnung wären wir mit dem gleichen Ausgangspunkt schneller zum Ziel gekommen:

$$\begin{aligned} V_{\text{Kugel}} &= 2 \cdot \int_0^R \pi [r(x)]^2 dx \quad \text{mit} \quad r^2 = R^2 - x^2 \\ &= 2\pi \int_0^R (R^2 - x^2) dx \\ &= 2\pi \left(R^2 \cdot x \Big|_0^R - \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^R \right) = \frac{4\pi}{3} R^3 \end{aligned}$$

Die Kreisfläche Wir kehren noch einmal zu unserem Ausgangspunkt zurück und fragen, ob wir auf die gleiche Weise auch den dort vorausgesetzten Inhalt $A = \pi r^2$ der Fläche eines Kreises herleiten können.



Draufsicht auf die Kreisfläche

Dazu approximieren wir die gesuchte Fläche durch Rechteckflächen der Größe $A_k = r_k \cdot \Delta x$, wobei wie bisher

$$r_k = \frac{R}{n} \sqrt{n^2 - k^2}$$

und $\Delta x = \frac{R}{n}$ ist. Die Gesamtfläche der n Rechtecke, die ein Viertel der Kreisfläche ausfüllen, ist

$$A_n = \frac{R^2}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Dafür ist keine Summenformel bekannt.

Die Methode der Integralrechnung ergibt für die Fläche des Vollkreises (Faktor 4)

$$\begin{aligned} A_{\text{Kreis}} &= 4 \int_0^R r(x) \, dx = 4 \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \, dx \\ &= 4R \int_0^R \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} \, dx. \end{aligned}$$

Dieses Integral werten wir in zwei Schritten aus.

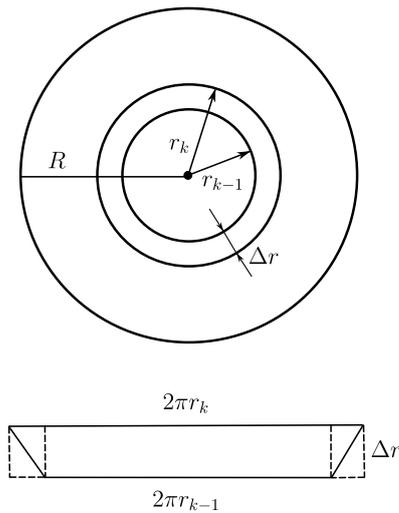
- **1. Schritt:** Wir führen die trigonometrische Substitution $x = R \sin \phi$ mit den Integrationsgrenzen $\phi = 0$ und $\phi = \frac{\pi}{2}$ und $dx = R \cos \phi \, d\phi$ aus. Das führt auf

$$A = 4R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \phi \, d\phi.$$

- **2. Schritt:** Wir integrieren partiell mit $u' = \cos \phi$ und $v = \cos \phi$ und erhalten (Übungsaufgabe)

$$A = 4R^2 \cdot \frac{1}{2} (\phi + \sin \phi \cos \phi) \Big|_0^{\pi/2} = \pi R^2.$$

Rückblickend erkennen wir, daß im Vergleich mit der Integralrechnung das Rechnen mit Summen sehr viel aufwendiger und bisweilen erfolglos ist. Und es liegt die Frage nahe, ob die Schwierigkeiten im Fall der Kreisscheibe dadurch hervorgerufen wurden, daß wir in kartesischen Koordinaten gerechnet haben, die der Symmetrie des Kreises gar nicht angepaßt sind.



Anstelle der Approximation der Kreisfläche durch Rechteckflächen versuchen wir es mit einer Zerlegung in n Kreisringe der Dicke („Höhe“)

$$\Delta r = r_k - r_{k-1} = \frac{R}{n}.$$

Wir setzen die Kenntnis des Kreisumfangs $2\pi r_k$ als „Grundlinie“ für die Flächenberechnung voraus, denn es handelt sich ja eigentlich um die Definition der Kreiszahl (des Winkels) π . Wenn wir uns einen Kreisring ausgestreckt denken, erkennen wir, daß sein Flächeninhalt gleich dem eines Trapezes mit der Höhe Δr und den parallelen Seiten der Länge $2\pi r_{k-1}$ und $2\pi r_k$ ist, also

$$A_k = \pi(2r_k - \Delta r)\Delta r.$$

Mit $r_k = k \cdot \Delta r$ wird die Gesamtfläche der n Kreisringe

$$\begin{aligned} A_n &= \pi \cdot \frac{R^2}{n^2} \sum_{k=1}^n (2k-1) \\ &= \pi \cdot \frac{R^2}{n^2} \left(2 \sum_{k=1}^n k - n \right). \end{aligned}$$

Es ist

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{1}{2}n(n+1)$$

die berühmte Gaußsche Summenformel (Übungsaufgabe: Beweis durch vollständige Induktion). Mit diesem Resultat wird schließlich

$$A_n = \pi \frac{R^2}{n^2} \cdot n^2 = \pi R^2.$$

Es ergibt sich die gesuchte Kreisfläche, ohne daß wir den Limes $n \rightarrow \infty$ noch bilden mußten. Das liegt daran, daß wir die Fläche der Kreisringe ohne Näherung verwendet haben. Es ist instruktiv zu sehen, wie wir zu dem gleichen Ergebnis gelangt wären, hätten wir die Fläche der Kreisringe durch Rechteckflächen approximiert, deren eine Seite Δr und deren andere Seite $2\pi r_k$ oder $2\pi r_{k-1}$ gewesen wäre (Übungsaufgabe).

Mit dem gleichen Ausgangspunkt führt die Methode der Integralrechnung auf den denkbar einfachsten Fall,

$$A_{\text{Kreis}} = \int_0^R 2\pi r \, dr = 2\pi \cdot \frac{r^2}{2} \Big|_0^R = \pi R^2.$$

Wir sehen an diesem Beispiel, wie sehr die Verwendung von Koordinaten, die der Symmetrie des Problems angepaßt sind, dessen Lösung erleichtert. Die radiale Koordinate r ist der Symmetrie des Kreises ideal angepaßt, die kartesischen Koordinaten x und y überhaupt nicht.

8.8. Zusätzlicher Inhalt: Integrationsmethoden III – Partialbruchzerlegung

Die Methode der Partialbruchzerlegung behandeln wir anhand repräsentativer Beispiele.

Erstes Beispiel Eine Abituraufgabe am Gymnasium Ernestinum, Gotha 1850

„Eine Kurve ist gegeben durch die Gleichung

$$x^3y + 3x^2(2y - 1) + x(11y - 2) + (6y - 1) = 0.$$

Man verlangt den Flächeninhalt zwischen der Abszissenachse und der Kurve zwischen den Werten $x = 0$ und x .“

Lösung

- 1. Schritt: Wir stellen y als $y = f(x)$ dar,

$$y = \frac{3x^2 + 2x + 1}{x^3 + 6x^2 + 11x + 6}$$

und haben eine *rationale Funktion* (Quotient zweier Polynome) zu integrieren,

$$\int \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} dx,$$

worin hier

$$\begin{aligned} n = 2, \quad P_2(x) &= 3x^2 + 2x + 1, \\ m = 3, \quad Q_3(x) &= x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \end{aligned}$$

ist.

Anmerkung Wenn $n \geq m$ ist, beginnen wir mit einer *Polynomdivision*, an deren Ende im allgemeinen eine rationale Funktion mit $n < m$ steht.

- 2. Schritt: Wir *faktorisieren* das Nennerpolynom

$$Q_m(x) = \sum_{i=0}^m a_i x^i; \quad m \geq 1, \quad a_m \neq 0$$

durch Zerlegung in Linearfaktoren. Grundlage dafür ist der *Fundamentalsatz der Algebra*:

Jedes Polynom $Q_m(x)$; $m \geq 1$, $a_m \neq 0$ lässt sich als Produkt von m Linearfaktoren $(x - x_m)$ darstellen,

$$Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m) \cdot a_m.$$

Darin sind x_i die m Wurzeln^a der Gleichung m -ten Grades $Q_m(x) = 0$, welche reell oder komplex sein können.

^aHier wird das Wort „Wurzel“ synonym für „Lösung“ gebraucht.

Beispiel $Q_3(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6 \stackrel{!}{=} 0$, ($a_3 = 1$)

- Wir „erraten“ die erste Lösung: $x_1 = -1$.
- Polynomdivision: $(x^3 + 6x^2 + 11x + 6) : (x + 1) = x^2 + 5x + 6$.
- Wir zerlegen die quadratische Gleichung $x^2 + 5x + 6 \stackrel{!}{=} 0$ in Linearfaktoren und erhalten zwei reelle Lösungen $x_2 = -2$; $x_3 = -3$.
- Resultat: $Q_3 = (x + 1)(x + 2)(x + 3)$

• 3. Schritt:

- Wir schreiben die rationale Funktion als Summe von *Partialbrüchen*, deren Nenner die einzelnen Linearfaktoren sind,

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{x + 2} + \frac{C}{x + 3}.$$

- Wir erhalten für die unbekanntenen Koeffizienten A, B, C aus

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2x + 1 &= A(x + 2)(x + 3) + B(x + 1)(x + 3) + C(x + 1)(x + 2) \\ &= (A + B + C)x^2 + (5A + 4B + 3C)x + (6A + 3B + 2C) \quad (*) \end{aligned}$$

durch *Koeffizientenvergleich* das Gleichungssystem

$$A + B + C = 3$$

$$5A + 4B + 3C = 2$$

$$6A + 3B + 2C = 1$$

mit den Lösungen $A = 1, B = -9$ und $C = 11$ (Übungsaufgabe).

Resultat:

$$\frac{3x^2 + 2x + 1}{(x + 1)(x + 2)(x + 3)} = \frac{1}{x + 1} - \frac{9}{x + 2} + \frac{11}{x + 3}.$$

Anmerkung Es ist oft einfacher, x_1, x_2, x_3 nacheinander in (*) einsetzen. In unserem Beispiel haben wir dann für $x = x_1 = -1$: $2 = 2A$ und also $A = 1$.

- 4. Schritt: Durch Partialbruchzerlegung ist die Rückführung auf logarithmische Integrale vom Typ

$$\int \frac{dx}{x + a} = \ln|x + a| + C$$

gelungen.

In unserem *Beispiel* haben wir

$$\int \frac{dx}{x + 1} - 9 \frac{dx}{x + 2} + 11 \frac{dx}{x + 3} = \ln|x + 1| - 9 \ln|x + 2| + 11 \ln|x + 3| + C.$$

- 5. Schritt: Vollständige Lösung der Aufgabe ($x > 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^x \frac{3x'^2 + 2x' + 1}{x'^3 + 6x'^2 + 11x' + 6} dx' &= \ln(x' + 1)|_0^x - 9 \ln(x' + 2)|_0^x + 11 \ln(x' + 3)|_0^x \\ &= \ln(x + 1) - 9 \ln\left(\frac{x}{2} + 1\right) + 11 \ln\left(\frac{x}{3} + 1\right) \end{aligned}$$

(Da laut Aufgabe die obere Integrationsgrenze x heißen soll, haben wir im Integranden vorübergehend die Integrationsvariable x' genannt. Auch jedes andere Formelsymbol wäre möglich gewesen.)

Andere typische Beispiele Die nachfolgenden Beispiele sind keine vollständigen Aufgaben. Wir diskutieren nur die Nenner-Polynome $Q_m(x)$.

- a) Linearfaktoren kommen doppelt (oder mehrfach) vor.

Beispiel: $Q_3 = x^3 - x^2 - 8x + 12 = (x + 3)(x - 2)^2$

Wir machen den *Ansatz*

$$\frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{C}{x+3}$$

Der erste und dritte Summand führen wieder auf logarithmische Integrale, der zweite auf den Integraltyp

$$\int \frac{dx}{(x+a)^n} = \frac{(x+a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{1}{(1-n) \cdot (x+a)^{1-n}} + C.$$

- b) Nicht alle Linearfaktoren sind reell (1. Fall).

Beispiel: $Q_3 = x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$, und $x^2 + x + 1 = 0$ hat keine reelle Lösung.

In der höheren Algebra wird bewiesen: Jedes Polynom kann in lineare und quadratische Faktoren zerlegt werden.

Wir machen den *Ansatz*

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}.$$

Der erste Summand führt wieder auf eine logarithmische Integration, der zweite auf den Integraltyp

$$\int \frac{Bx+C}{x^2+x+1} dx.$$

Zur Auswertung dieses Integrals erzeugen wir im Zähler des Integranden die Ableitung des Nenners, in unserem Beispiel $2x + 1$. Dann wird in diesem Beispiel

$$Bx + C = \frac{B}{2}(2x + 1) + \left(C - \frac{B}{2}\right),$$

worin der zweite Summand eine Konstante ist. Der erste Summand führt – bis auf den Vorfaktor $\frac{B}{2}$ – auf das logarithmische Integral

$$\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} dx = \ln|x^2+x+1| + \tilde{C}.$$

Bis auf den konstanten Vorfaktor $\left(C - \frac{B}{2}\right)$ ist das zweite Integral

$$\int \frac{dx}{x^2+x+1}.$$

Wir führen es in drei Schritten auf ein bekanntes Grundintegral zurück:

- 1. Schritt: Quadratische Ergänzung

$$\int \frac{dx}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}$$

- 2. Schritt: Wir machen den zweiten Summanden im Nenner zu 1,

$$\frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right)\right]^2 + 1}$$

- 3. Schritt: Substitution

$$u = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x + \frac{1}{2}\right), \quad \text{soda\ss} \quad du = \frac{2}{\sqrt{3}} dx.$$

Damit ist das Integral

$$\frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \int \frac{du}{u^2 + 1}$$

eines der Grundintegrale.

- Resultat:

$$\int \frac{dx}{x^2 + x + 1} = \frac{2}{3} \sqrt{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \tilde{C}.$$

c) Nicht alle Linearfaktoren sind reell (2. Fall).

Beispiel: $Q_5 = (x - 1)(x^2 + 2x + 2)^2$ und $x^2 + 2x + 2 = 0$ hat keine reelle Lösung. Der Faktor $(x^2 + 2x + 2)$ kommt in zweiter Potenz vor.

Wir machen den Ansatz

$$\frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2x + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2x + 2)^2}$$

und behandeln die beiden ersten Terme wie bei b). Auch den dritten Term schreiben wir als Integranden so auf, da\ss im Zähler die Ableitung der im Nenner vorkommenden Klammer steht. Dann haben wir zwei Integrale zu berechnen, die sich aus

$$Dx + E = \frac{D}{2}(2x + 2) + (E - D)$$

ergeben:

- Ohne den Vorfaktor $\frac{D}{2}$ ist das erste Integral

$$\int \frac{2x + 2}{(x^2 + 2x + 2)^2} dx.$$

Wir substituieren $u = x^2 + 2x + 2$, also $du = (2x + 2)dx$, wodurch das Integral in

$$\int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} + \tilde{C} = -\frac{1}{x^2 + 2x + 2} + \tilde{C}$$

übergeht.

- Das zweite Integral ist (wieder bis auf einen Vorfaktor)

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2}.$$

Wir berechnen es in mehreren Schritten:

- 1. Schritt: Quadratische Ergänzung

$$\int \frac{dx}{[(x + 1)^2 + 1]^2}$$

- 2. Schritt: Trigonometrische Substitution

$$x + 1 = \tan \theta, \quad \text{soda\ss} \quad dx = \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

Damit ist das Integral

$$\int \cos^2 \theta \, d\theta.$$

- 3. Schritt: Dieses Integral berechnen wir mit der Methode der partiellen Integration ($u = \cos \theta$, $v' = \cos \theta$) und erhalten (Übungsaufgabe)

$$\int \cos^2 \theta \, d\theta = \frac{1}{2}(\theta + \cos \theta \cdot \sin \theta).$$

- 4. Schritt: Schließlich soll das Ergebnis in der Variablen x ausgedrückt werden. Wir haben daher $\theta = \arctan(x + 1)$ zu re-substituieren. Das gelingt mit Hilfe der Relationen

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \quad \text{und} \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}.$$

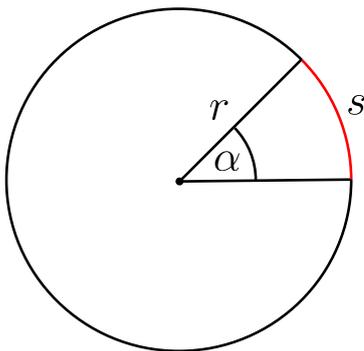
- Resultat:

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 2)^2} = \frac{1}{2} \arctan(x + 1) + \frac{1}{2} \cdot \frac{x + 1}{x^2 + 2x + 2} + \bar{C}.$$

A. Anhang

A.1. Winkelmaße

Das Bogenmaß eines Winkels Das Bogenmaß ist die natürliche Definition eines Winkels.



Wir betrachten auf einem Kreis mit dem Radius r ein Bogenstück der Länge s , also einen Teil vom Kreisumfang $u = 2\pi r$. Zu diesem Bogenstück gehört ein Zentriwinkel α , der durch

$$\alpha = \frac{s}{r}$$

definiert ist. Diese Definition ist anschaulich: Das gleiche Bogenstück auf einem größeren Kreis entspricht einem kleineren Winkel, und ein größeres Bogenstück auf dem gleichen Kreis entspricht einem größeren Winkel.

Ausgedrückt durch den Kreisumfang nimmt die Definition des Winkels α die Gestalt

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{s}{u}$$

an. Ist s der gesamte Kreisumfang u , wird α zum Vollwinkel $\alpha = 2\pi$.

Ein Winkel ist also definiert als das Verhältnis zweier Längen und damit eine reine Zahl. Er ist dimensionslos und frei von einer Maßeinheit. Da Zahlen aber nach Herkunft und Bedeutung ganz unterschiedlich sein können, müssen wir kennzeichnen, daß wir in bestimmten Situationen einen Winkel meinen, falls dies nicht aus dem Kontext ohnehin klar ist. Dazu gibt es den Zusatz „rad“, abgeleitet von „Radiant“. Dabei handelt es sich *nicht* um eine Maßeinheit vom gleichen Status wie z.B. Meter oder Sekunde. Dieser Zusatz sagt lediglich „Diese Zahl soll ein Winkel sein“. Dementsprechend ist die Maßeinheit für die Winkelgeschwindigkeit $[\omega] = \frac{1}{s}$ und nicht $\frac{\text{rad}}{s}$.

Das Gradmaß eines Winkels Unterteilen wir nun den Umfang eines Kreises (willkürlich) in 360 gleiche Teile mit der „Elementar-Bogenlänge“

$$s_0 = \frac{2\pi r}{360},$$

gehört dazu ein „Elementar-Winkel“

$$\alpha_0 = \frac{s_0}{r} = \frac{2\pi}{360} \approx 0,01745.$$

Ebenso wie wir die Länge s eines Bogenstücks als Vielfaches der Elementar-Bogenlänge s_0 ausdrücken können, können wir einen Winkel α als Vielfaches von α_0 angeben,

$$\alpha = N \cdot \alpha_0,$$

wobei N nicht notwendig eine ganze Zahl sein muß. Dann ist

$$N = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \alpha \cdot \frac{360}{2\pi} \approx 57,29578 \cdot \alpha.$$

Wir können einen Winkel statt durch sein Bogenmaß auch durch die Zahl N beschreiben. Diese Zahl ist als Verhältnis zweier dimensionsloser Winkel wieder dimensionslos. Und wieder müssen wir vermerken, daß es sich bei einer Zahl gegebenenfalls um einen Winkel handelt. Dies geschieht durch den Zusatz „Grad ($^\circ$)“, der wiederum *keine* Maßeinheit ist. Er beantwortet die Frage: Wie oft (N) müssen wir Elementarwinkel α_0 aneinanderfügen, um einen bestimmten Winkel zu erhalten?

Bezeichnen wir einen Winkel im Bogenmaß mit $\alpha \rightarrow \hat{\alpha}$ und im Gradmaß mit $N \rightarrow \overset{\circ}{\alpha}$, läßt sich die Umrechnung beider Maße auch in der Form

$$\frac{\hat{\alpha}}{2\pi} = \frac{\overset{\circ}{\alpha}}{360}$$

aufschreiben.

Beispiel Als Beispiel wählen wir einen Viertelkreis. Dafür ist

$$s = \frac{1}{4} \cdot 2\pi r = \frac{\pi}{2} r, \quad \alpha = \frac{s}{r} = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad N = \frac{\alpha}{\alpha_0} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{360}{2\pi} = 90.$$