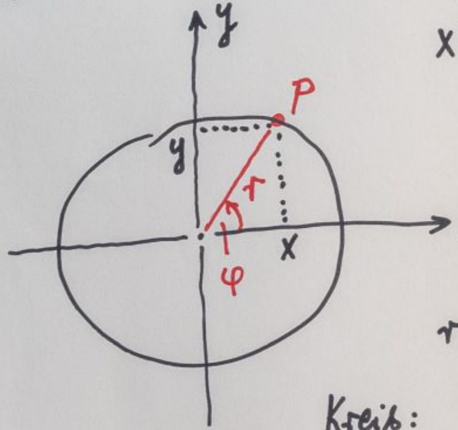
Kegelschnitte

Kreis

... geometrischer Ort aller Punkte in der Ebene, die von einem festen Punkt (Mittelpunkt) den gleichen Abstand haben.



$x^2 + y^2 = r^2$
$= const$

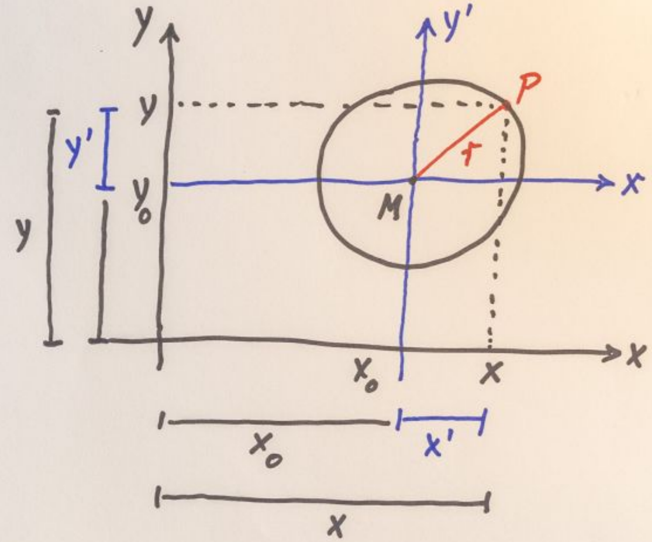
Mittelpunktsgleichung

$r = r(\varphi)$ Polargleichung

Kreis: $r = const$

$$\left(r(\varphi) = \frac{p}{1 - \varepsilon \cos\varphi} \right)$$

Kreis nicht in Mittelpunktslage



$x'^2 + y'^2 = r^2$

Koordinatentransformation:

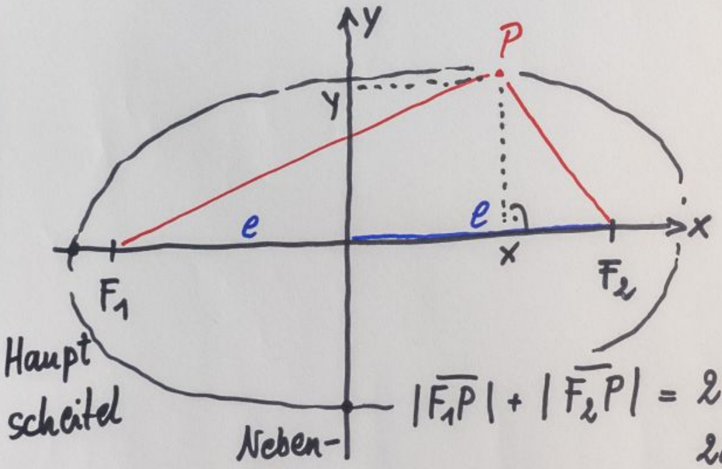
$$\left\| \begin{aligned} x' &= x - x_0 \\ y' &= y - y_0 \end{aligned} \right\|$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

Kegelschnitte

Ellipse

... geometrischer Ort aller Punkte der Ebene, für die die Summe der Abstände von <u>zwei</u> festen Punkten (Brennpunkte) konstant ist.



e: lineare Exzentrizität

$$|\overline{F_1P}| + |\overline{F_2P}| = 2a = const$$
$$2a > 2e$$

Faden-, Gärtnerkonstruktion

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2} + \sqrt{(e-x)^2+y^2} = 2a$$
$$\sqrt{(e+x)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(e-x)^2+y^2}$$

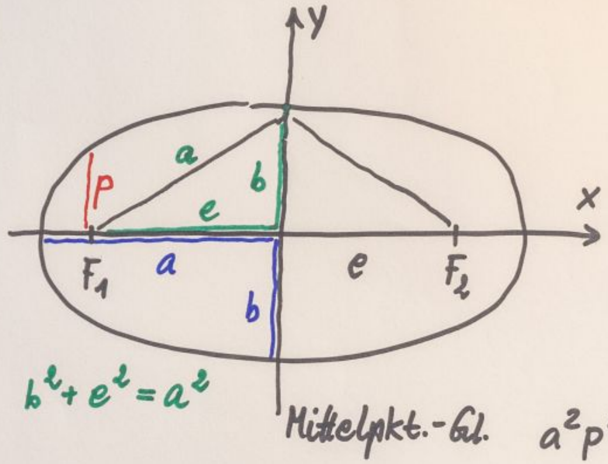
Quadrieren: $$ex - a^2 = -a\sqrt{(e-x)^2+y^2}$$

— " — : $$(a^2-e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-e^2)$$

Hauptscheitel: $y = 0$, $|x| = a$ große Halbachse

Nebenscheitel: $x = 0$, $|y| = \sqrt{a^2-e^2}$
$= b$ kleine Halbachse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\underline{\underline{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}}$$ Mittelpunktsgleichung



$b^2 + e^2 = a^2$

p: Halbparameter

$$\underline{\underline{\varepsilon \equiv \frac{e}{a} < 1}}$$ numerische Exzentrizität

p: $x = \pm e$
$p = |y(e)|$

$$a^2p^2 = a^2b^2 - b^2e^2$$
$$= b^2(a^2-e^2) = b^4$$

$$\underline{\underline{p = \frac{b^2}{a}}}$$

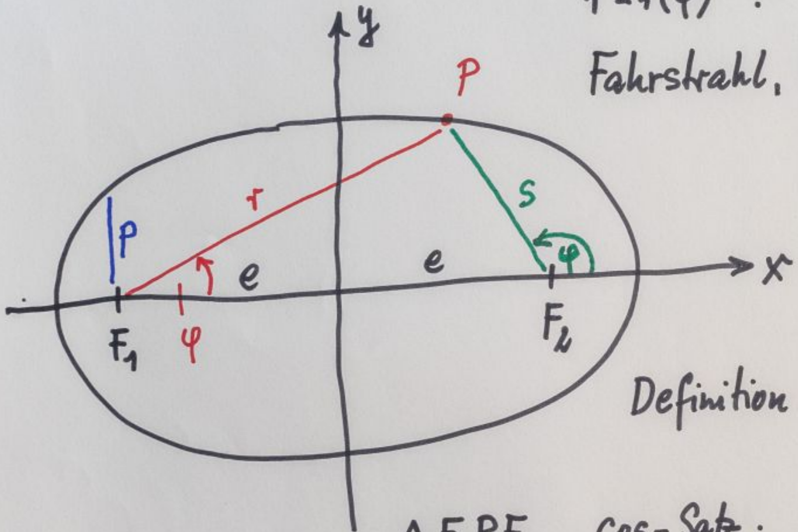
Kegelschnitte

Ellipse – Teil 2

Polargleichung : Pol : F_1

$r = r(\varphi)$?

Fahrstrahl, Leitstrahl



Definition : $r + s = 2a$

$s = 2a - r$

$\Delta F_1 P F_2$, cos-Satz : $s^2 = r^2 + (2e)^2 - 2 \cdot r \cdot 2e \cdot \cos\varphi$

$$4a^2 - 4ar + r^2 = r^2 + 4e^2 - 4re\cos\varphi$$

$$a^2 - e^2 = r(a - e\cos\varphi)$$

$$b^2 = ra\left(1 - \frac{e}{a}\cos\varphi\right)$$

$$r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}$$

– F_2 als Pol :

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}$$

– $\varepsilon < 1$, $\cos\varphi \leq 1$

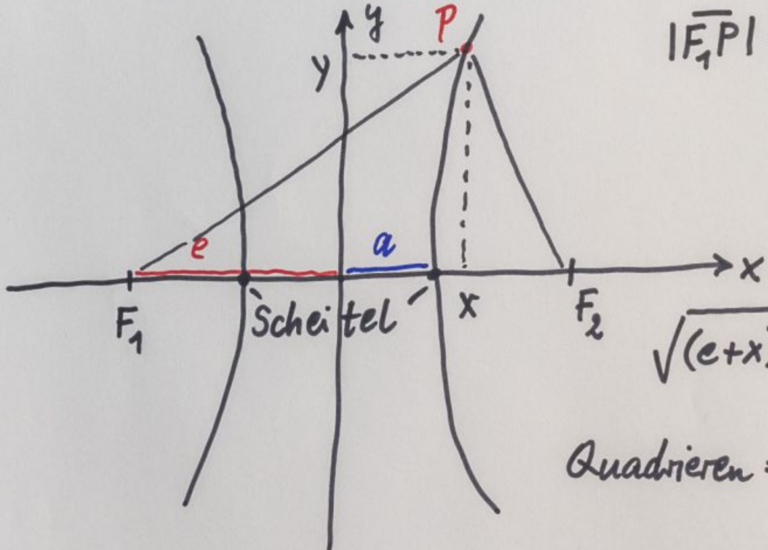
– $p = r\left(\frac{\pi}{2}\right)$

– Kreis : $\varepsilon = 0 \rightarrow r = p = b = a$

Kegelschnitte

Hyperbel

... geometrischer Ort aller Punkte der Ebene, für die die Differenz von zwei festen Punkten (Brennpunkte) konstant ist.



$$|\overline{F_1P}| - |\overline{F_2P}| = \pm 2a \quad , \quad a>0$$
$$e>a$$

$$\sqrt{(e+x)^2+y^2} - \sqrt{(x-e)^2+y^2} = \pm 2a$$

Quadrieren: $(a^2-e^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-e^2)$

spezielle P: $y=0 \rightarrow |x| = a$, Scheitelabstand $2a$
transversale Achse

$x=0 \rightarrow |y| = \sqrt{a^2-e^2}$, $b^2 = e^2-a^2 > 0$

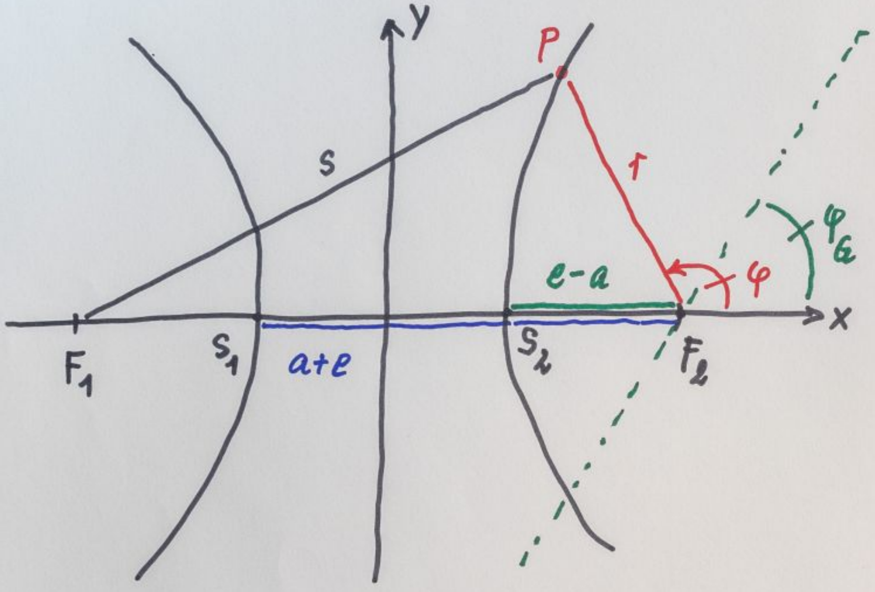
$|y| = ib$, b: imaginäre Achse

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \text{ Mittelpunktsgleichung}$$

($a=b$: gleichseitige Hyperbel)

Polargleichung



numerische Exzentrizität $\varepsilon \equiv \frac{e}{a} > 1$

Hyperbel-Halbparameter $p = \frac{b^2}{a}$

Definition: $r - s = -2a$, $(r < s)$

$s = r + 2a$

$\Delta F_1 P F_2$, cos-Satz: $s^2 = r^2 + (2e)^2 - 4re\cos(\pi - \varphi)$

$ra + a^2 = e^2 + re\cos\varphi$

$\underbrace{a^2 - e^2}_{-b^2} = -ra(1 - \varepsilon\cos\varphi)$

$$\boxed{r = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\varphi}}$$

Diskussion: $\cos\varphi \leq 1$

$\varepsilon > 1$

$\rightarrow$ Grenzwinkel $\cos\varphi_G = \frac{1}{\varepsilon}$

kein endlicher Wert für r

- $\varphi = \pi$: $\cos\varphi = -1$, $r = \frac{p}{1+\varepsilon} = \frac{b^2}{a\left(1+\frac{e}{a}\right)} = \frac{b^2}{a+e}$

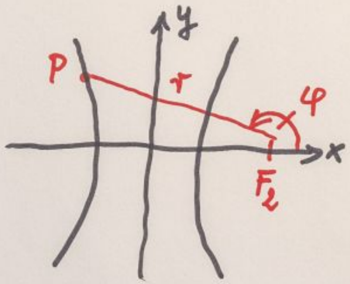
$$= \frac{b^2(a-e)}{(a+e)(a-e)} = \frac{b^2}{a^2-e^2}(a-e)$$

$$= -\frac{b^2}{b^2}(a-e) = e - a > 0 \quad : S_2$$

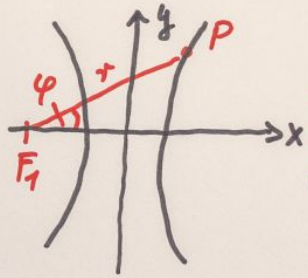
$r > 0$: $\cos\varphi < \frac{1}{\varepsilon}$, $\varphi_G < \varphi < 2\pi - \varphi_G$

- $\varphi = 0$: $\cos\varphi = 1$, $r = -(a+e) < 0$, $|r| = a + e$: S_1

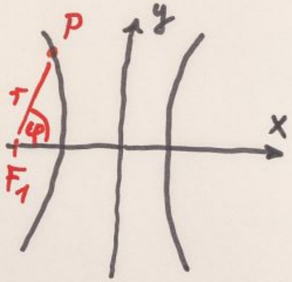
$r < 0$: $\cos\varphi > \frac{1}{\varepsilon}$, $-\varphi_G < \varphi < \varphi_G$



$r = -\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$



$r = -\frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$

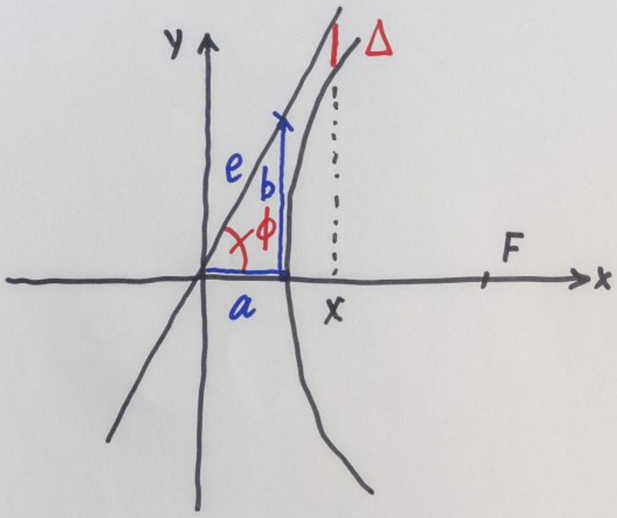


$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}$

Kegelschnitte

Hyperbel – Teil 3

Asymptoten der Hyperbel



Hyperbel $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$

Gerade $y = \pm \frac{b}{a} x$, Asymptoten der Hyperbel

Anstieg: $\tan\phi = \frac{b}{a}$

$$\cos\phi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{e} = \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\rightarrow \phi = \varphi_G$$

$$\Delta = \frac{b}{a}x - \frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

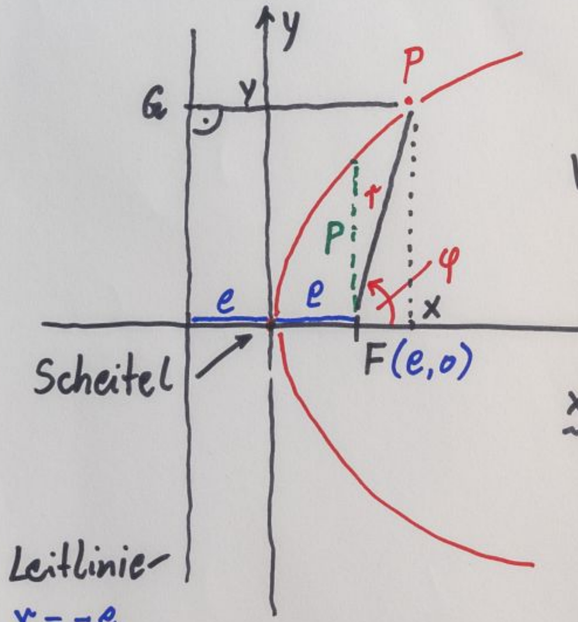
$$= \frac{b}{a}\,\frac{(x-\sqrt{x^2-a^2})(x+\sqrt{x^2-a^2})}{x+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$= \frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{x+\sqrt{x^2-a^2}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$$

Kegelschnitte

Parabel

... geometrischer Ort aller Punkte der Ebene, Abstände von einem Punkt (Brennpunkt) und einer Linie (Leitlinie, Direktrix) gleich



$$|\overline{PF}| = |\overline{PG}|$$

$$\sqrt{(x-e)^2 + y^2} = x + e$$

$$(x-e)^2 + y^2 = (x+e)^2$$

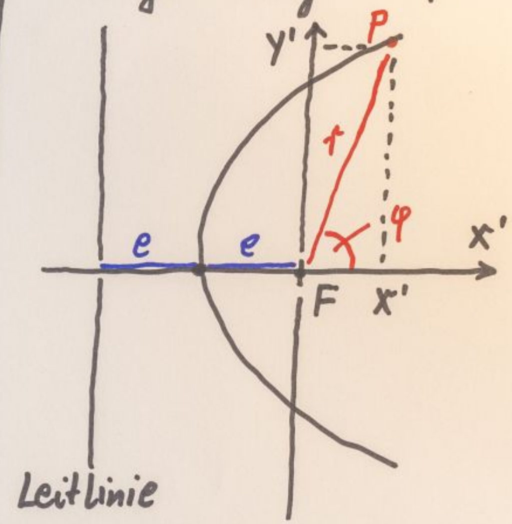
$$x^2 - 2ex + e^2 + y^2 = x^2 + 2ex + e^2$$

$\underline{\underline{y^2 = 4ex}}$, Scheitelgleichung

$$\downarrow$$

Halbparameter $p = y(e) = 2e \longrightarrow \underline{\underline{y^2 = 2px}}$

Polargleichung (r, φ)



$$x' = x - e$$

$$y' = y$$

$$x' = r\cos\varphi$$

$$y' = r\sin\varphi$$

$$y'^2 = 2p(x' + e) = 2p\left(x' + \frac{p}{2}\right)$$

$$r^2 \sin^2\varphi = 2pr\cos\varphi + p^2$$

$$r^2 - 2p\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} r - \frac{p^2}{\sin^2\varphi} = 0$$

$$r = \frac{p}{\sin^2\varphi}(\cos\varphi \pm 1), \quad \underline{r > 0}$$

$$r = \frac{p}{\sin^2\varphi}(1 + \cos\varphi) = \frac{p(1+\cos\varphi)}{1 - \cos^2\varphi}$$

$$= \frac{p(1+\cos\varphi)}{(1-\cos\varphi)(1+\cos\varphi)}$$

$$\underline{\underline{r = \frac{p}{1-\cos\varphi}}} \quad \text{Polargleichung}$$

Polargleichung der Kegelschnitte

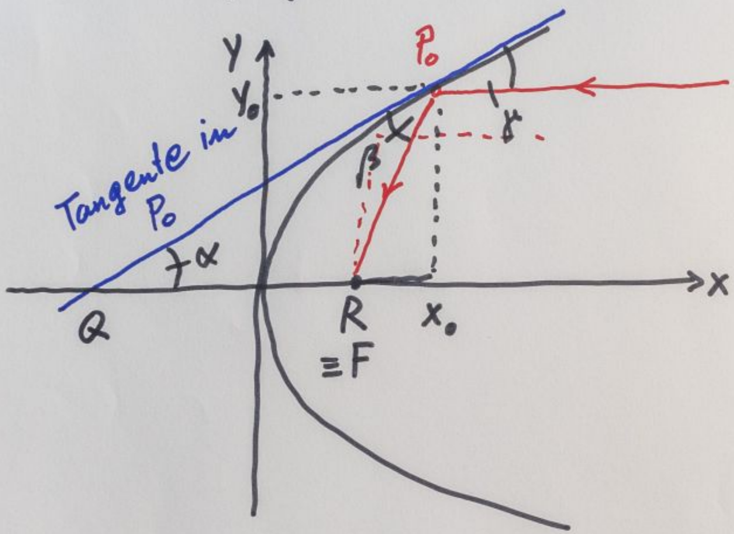
$$r = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi} \quad \text{mit} \quad \varepsilon \begin{cases} =0 & \text{Kreis} \\ <1 & \text{Ellipse} \\ =1 & \text{Parabel} \\ >1 & \text{Hyperbel} \end{cases}$$

Kegelschnitte

Parabel

Brennpunkt - Eigenschaft

(Parabolspiegel, Scheinwerfer)



Reflexionsgesetz: $\beta = \gamma$

Stufenwinkel: $\alpha = \gamma$

$\left.\begin{matrix}\beta = \gamma \\ \alpha = \gamma\end{matrix}\right\} \alpha = \beta$

$\rightarrow \Delta QRP_0$ gleichschenklig

$$|\overline{QR}| = |\overline{RP_0}|$$

Gleichung der Tangente in P_0

$$y^2 = 2px$$

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \sqrt{2p}\,\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{p}{2x}} \quad \rightarrow \quad m = y'\Big|_{P_0} = \sqrt{\frac{p}{2x_0}}$$

Zweipunktgleichung P_0, Q: $y_Q - y_0 = m(x_Q - x_0)$, $y_Q = 0$

$$-\sqrt{2px_0} = \sqrt{\frac{p}{2x_0}}\,(x_Q - x_0)$$

$$-2x_0 = x_Q - x_0$$

$$x_Q = -x_0$$

$$\rightarrow |\overline{QR}| = |x_Q| + x_R = x_0 + x_R$$

$$|\overline{RP_0}| = \sqrt{(x_0 - x_R)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 + x_R)^2 - 4x_0x_R + 2px_0}$$

$$= \sqrt{(x_0 + x_R)^2 + 2x_0(p - 2x_R)} \overset{!}{=} x_0 + x_R$$

$$\rightarrow p = 2x_R, \quad x_R = \frac{p}{2} = e$$

$R \equiv F$ unabhängig von P_0