Vektoralgebra

Einführung: Vektoren

Translation: Bewegung des Raumes, sämtliche Punkte gleich lange und gleich gerichtete Strecken zurücklegen

→ Kenntnis einer beliebigen Strecke bestimmt Translation vollständig, Ausgangspunkt unwesentlich

Vektor: geometrische oder physikalische Größe, Betrag, Richtung
eindeutig den Translationen zugeordnet

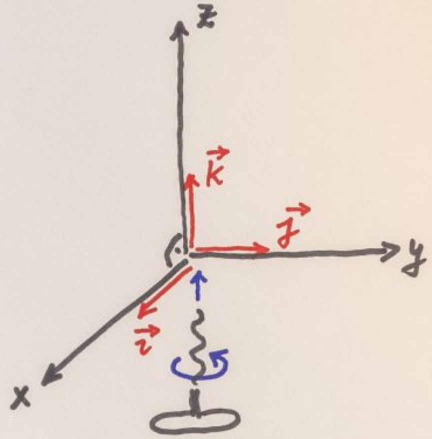
Beispiele: $\vec{v}$, $\vec{a}$, $\vec{F}$, $\vec{E}$, $\vec{H}$

Ortsvektor: fest gewählter Ausgangspunkt (Lage des Endpunktes)

siehe „Zeiger" in der Gaußschen Zahlenebene

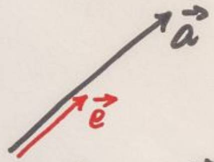
Zerlegung von Vektoren in Anteile nach drei beliebigen (nicht in einer Ebene liegenden) Richtungen

hier: rechtshändiges, kartesisches Koordinatensystem



- Basisvektoren $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$
- Korkenzieher-, Rechtsschraubenregel
  Rechtsdrehung $\vec{i} \to \vec{j}$ auf kürzestem Wege
  Vorschubrichtung: $\vec{k}$
- $\vec{i} \to \vec{j}$ von Spitze des Vektors $\vec{k}$ gesehen: entgegen Uhrzeigersinn

$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$



$\vec{e}$: Einheitsvektor
- Richtung und Richtungssinn von $\vec{a}$
- Betrag 1

$\vec{a} = a \cdot \vec{e}$

$a \equiv |\vec{a}|$

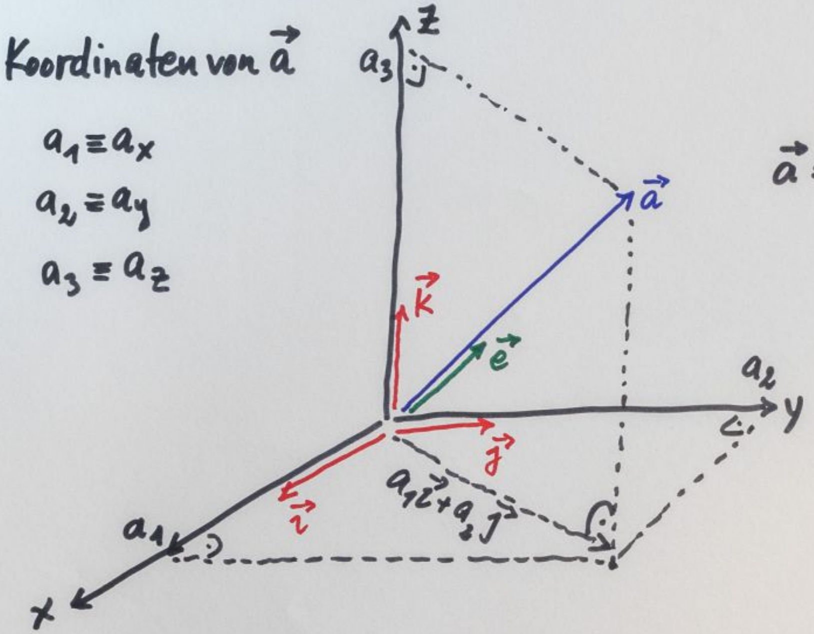
a: positive Maßzahl, Skalar

Koordinaten von $\vec{a}$

$a_1 \equiv a_x$

$a_2 \equiv a_y$

$a_3 \equiv a_z$



$\vec{a} = a \cdot \vec{e}$

$$\vec{a} = \underbrace{a_1\vec{i}}_{\text{Komponenten von } \vec{a}} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

- $a_3 = 0$: $\vec{a}$ in (x,y)-Ebene
- Betrag (Länge, Norm)

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad \text{(räumlicher Pythagoras)}$$

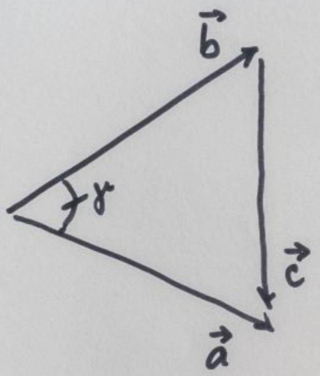
- $\vec{e}$ (Normierung von $\vec{a}$)

$$\vec{e} = \frac{\vec{a}}{a} = \frac{a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}$$

Vektoralgebra

Skalarprodukt

Frage: Winkel zwischen zwei Vektoren durch Komponenten ausdrücken?



$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$

cos-Satz: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$2ab\cos\gamma = a^2 + b^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2$$
$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
$$- (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2$$

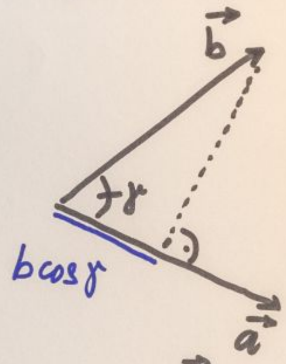
$\underline{ab\cos\gamma = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \vec{a}\cdot\vec{b}}$, Skalarprodukt

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{ab} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{ab}$$

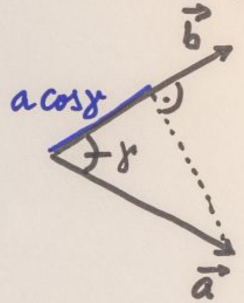
$$= \frac{a_1}{a}\cdot\frac{b_1}{b} + \frac{a_2}{a}\cdot\frac{b_2}{b} + \frac{a_3}{a}\cdot\frac{b_3}{b}$$

$\underline{\cos\gamma = \frac{\vec{a}}{a}\cdot\frac{\vec{b}}{b}}$, Produkt zweier Einheits-vektoren

geometrische Interpretation



$\vec{a}\,\vec{b} = a(b\cos\gamma)$



$\vec{a}\,\vec{b} = b(a\cos\gamma)$

Skalarprodukt $\vec{a}\,\vec{b}$: Produkt aus Betrag eines der beiden Faktoren und der Projektion des anderen Faktors auf diesen

- Skalar
- $\vec{a}\,\vec{b} = \vec{b}\,\vec{a}$, kommutativ
- $(\vec{a}\,\vec{b})\vec{c} \neq \vec{a}(\vec{b}\,\vec{c})$, nicht assoziativ
- $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\gamma = \frac{\pi}{2}$

$\underline{\vec{a}\,\vec{b} = 0}$, Orthogonalität

Vektoralgebra

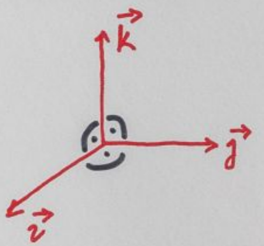
Skalarprodukt – Teil 2

– $\vec{a} = \vec{b}\,,\ \gamma = 0$

$$\vec{a}\cdot\vec{a} = a^2 \geq 0$$

$$a \equiv |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}\ ,\ \text{Betrag}$$

Basis-Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



orthonormierte Basis

$$\vec{i}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{j} = \vec{k}\cdot\vec{k} = 1$$

$$\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = \vec{j}\cdot\vec{k} = 0$$

Multiplikationstabelle

$\cdot$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$	1	0	0
$\vec{j}$	0	1	0
$\vec{k}$	0	0	1

$$\vec{a}\,\vec{b} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k})\cdot(b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})\ ,\ \text{Distributivgesetz}$$

$$= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\ \Big|\cdot\vec{i}\ \Big|\cdot\vec{j}\ \Big|\cdot\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}\cdot\vec{i} &= a_1 \\ \vec{a}\cdot\vec{j} &= a_2 \\ \vec{a}\cdot\vec{k} &= a_3 \end{aligned}\right.\quad \text{Projektionen auf Basisvektoren}$$

$$\vec{a} = (\vec{a}\,\vec{i})\,\vec{i} + (\vec{a}\,\vec{j})\,\vec{j} + (\vec{a}\,\vec{k})\,\vec{k}$$

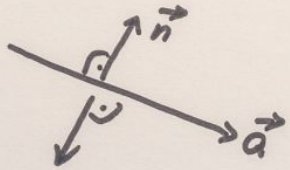
$$\left.\begin{aligned} &\vec{a}\,\vec{i} = a\cos\alpha \;\rightarrow\; && \cos\alpha = \frac{a_1}{a} \\ &\alpha = \sphericalangle(\vec{a},\vec{i}) && \\ &\beta = \sphericalangle(\vec{a},\vec{j}) && \cos\beta = \frac{a_2}{a} \\ &\gamma = \sphericalangle(\vec{a},\vec{k}) && \cos\gamma = \frac{a_3}{a} \end{aligned}\right\}\ \text{Richtungskosinus}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{a^2} = 1$$

Anwendungsbeispiel: $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, gesucht: orthogonaler Einheitsvektor in (x,y)-Ebene

$$\vec{n} = n_1\vec{i} + n_2\vec{j}$$

$$\left.\begin{aligned} \vec{n}\,\vec{n} &= n_1^2 + n_2^2 = 1 \\ \vec{n}\,\vec{a} &= n_1 a_1 + n_2 a_2 = 0 \end{aligned}\right\}\ \vec{n} = \mp\frac{a_2\vec{i} - a_1\vec{j}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

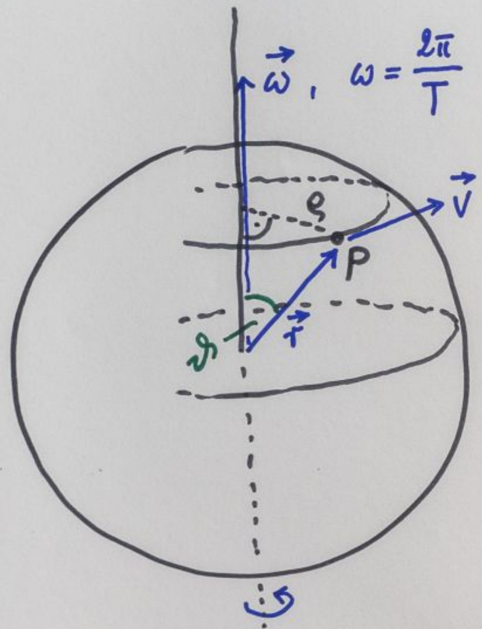


Vektoralgebra

Vektorprodukt

Drehbewegungen, Drehmoment, -impuls

Einführungsbeispiel



Winkelgeschwindigkeit

$\vartheta = \sphericalangle(\vec{r}, \vec{\omega})$, Poldistanz

ϱ: Radius des Breitenkreises

$v = \varrho \cdot \omega$, Kreisbahngeschwindigkeit

$\varrho = r \cdot \sin\vartheta$

$\longrightarrow \quad v = r\omega \cdot \sin\vartheta$, Betrag eines Vektors ($\vec{v}$)!

Vektorprodukt: $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Eigenschaften: $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$

– Betrag $c = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \cdot \sin\vartheta$, $\vartheta = \sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})$

– Richtung $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

„Korkenzieher-Regel":
1. Faktor $\longrightarrow$ 2. Faktor: Rechtsschraube auf kürzestem Weg

– Resultat: Vektor

– nicht kommutativ

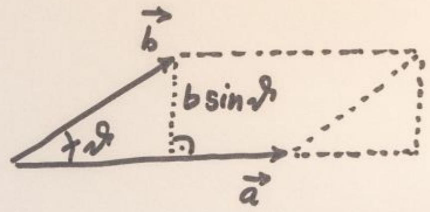
$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$\to \vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$

parallel

– geometrische Interpretation

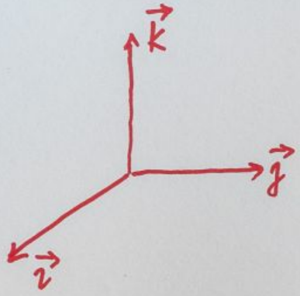


Flächeninhalt des Parallelogramms

$ab \sin\vartheta$

Vektorprodukt – Teil 2

– Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$



$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$

$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$

$\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$ zyklische Vertauschung

$\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$

Multiplikationstabelle

1. Faktor \ ×	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$ 2. Faktor
$\vec{i}$	$\vec{0}$	$\vec{k}$	$-\vec{j}$
$\vec{j}$	$-\vec{k}$	$\vec{0}$	$\vec{i}$
$\vec{k}$	$\vec{j}$	$-\vec{i}$	$\vec{0}$

– nicht assoziativ

$\vec{i} \times (\vec{i} \times \vec{j}) = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}$

$(\vec{i} \times \vec{i}) \times \vec{j} = \vec{0}$

– Komponentenzerlegung

$$\vec{c} = (a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}) \times (b_1\vec{i} + b_2\vec{j} + b_3\vec{k})$$

$$= a_1 b_2 (\vec{i} \times \vec{j}) + a_1 b_3 (\vec{i} \times \vec{k}) + a_2 b_1 (\vec{j} \times \vec{i}) + \dots$$

$$= (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k} + \dots$$

$$\vec{c} = (a_2 b_3 - a_3 b_2)\vec{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3)\vec{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1)\vec{k}$$

a) Betrag: $|\vec{c}|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$

$$a^2 b^2 \sin^2\vartheta = a^2 b^2 (1 - \cos^2\vartheta) = a^2 b^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$

Übereinstimmung

b) Orthogonalität: $\vec{c} \perp \vec{a}$, $\vec{c} \perp \vec{b}$

$$\vec{c}\,\vec{a} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) a_1 + (a_3 b_1 - a_1 b_3) a_2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1) a_3 = 0$$

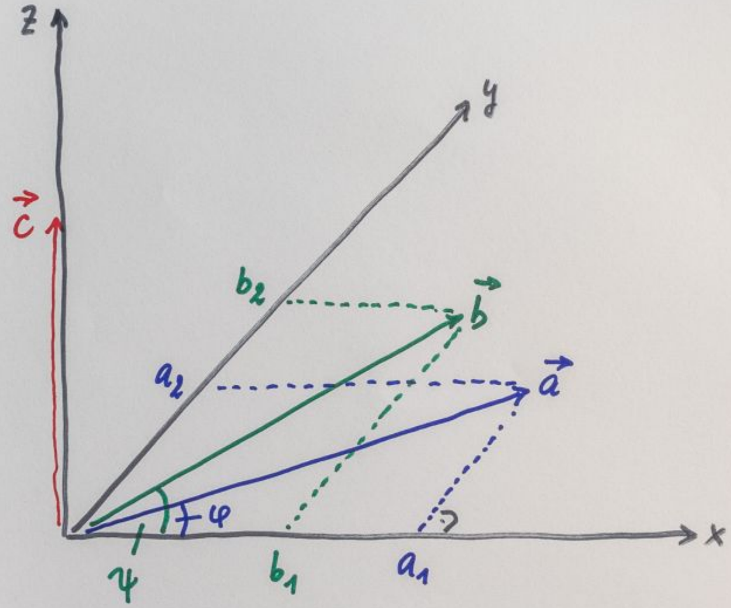
$$\vec{c}\,\vec{b} = 0$$

Vektorprodukt – Teil 3

– Korkenzieherregel

Annahme: $a_3 = 0$, $b_3 = 0$ ($\vec{a}$ und $\vec{b}$ in (x,y)-Ebene)

$$\vec{c} = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,\vec{k}$$



$\psi > \varphi$

$$\left.\begin{array}{l} \tan\varphi = \dfrac{a_2}{a_1} \\[2ex] \tan\psi = \dfrac{b_2}{b_1} \end{array}\right\} \tan\psi > \tan\varphi$$

$$\frac{b_2}{b_1} > \frac{a_2}{a_1}$$

$$b_2 a_1 > b_1 a_2$$

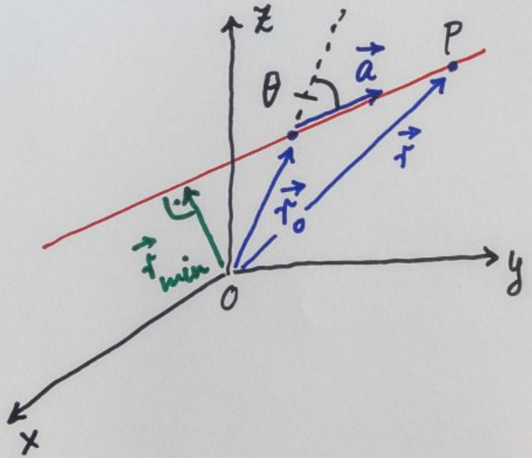
$$b_2 a_1 - a_2 b_1 > 0$$

$\vec{c}$: positive z-Richtung

Vektoralgebra

Geometrische Anwendungen mit physikalischer Bedeutung

a) Bestimmung einer Geraden durch Punkt und Richtung



$\vec{r}(\lambda) = \vec{r}_0 + \lambda \vec{a}$, λ: Parameter

Parameterdarstellung der Geraden

$\vec{a}$: Richtungsvektor

Beispiel: $\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + t \cdot \vec{v}$, geradlinig-gleichförmige Bewegung ($\vec{v} = \overrightarrow{const}$)

$\vec{r}(0) = \vec{r}_0$

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= \lambda a_1 \\ y - y_0 &= \lambda a_2 \\ z - z_0 &= \lambda a_3 \end{aligned}\right\} \lambda = \frac{x-x_0}{a_1} = \frac{y-y_0}{a_2} = \frac{z-z_0}{a_3}$$

Aufgabe: Kürzester Abstand der Geraden vom Koordinatenursprung?

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r}\cdot\vec{r}) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (*)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\vec{r}\cdot\vec{r}) = \frac{d}{d\lambda}\left[x^2(\lambda) + y^2(\lambda) + z^2(\lambda)\right]$$

$$= 2x\frac{dx}{d\lambda} + 2y\frac{dy}{d\lambda} + 2z\frac{dz}{d\lambda}$$

$$= 2(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot \left(\frac{dx}{d\lambda}\vec{i} + \frac{dy}{d\lambda}\vec{j} + \frac{dz}{d\lambda}\vec{k}\right)$$

$$= 2\vec{r}\frac{d\vec{r}}{d\lambda} \quad \text{, Produktregel}$$

für $\vec{r} = \vec{r}_0 + \lambda\vec{a} \longrightarrow \dfrac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{a}$

mit (*) : $\vec{r}\cdot\vec{a} \stackrel{!}{=} 0$

$$\vec{r}\vec{a} = (\vec{r}_0 + \lambda\vec{a})\vec{a} = 0 \longrightarrow \lambda = -\frac{\vec{r}_0\vec{a}}{a^2}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 - \frac{(\vec{r}_0\vec{a})}{a^2}\vec{a} = \vec{r}_{min}$$

$$r_{min}^2 = \vec{r}_{min}\cdot\vec{r}_{min} = \vec{r}_0\vec{r}_0 - \frac{1}{a^2}(\vec{r}_0\vec{a})^2$$

$$= r_0^2 - \frac{1}{a^2} r_0^2 a^2 \cos^2\theta = r_0^2(1-\cos^2\theta)$$

$$= r_0^2 \sin^2\theta$$

$$r_{min} = r_0 \sin\theta = \left|\vec{r}_0 \times \frac{\vec{a}}{a}\right|$$

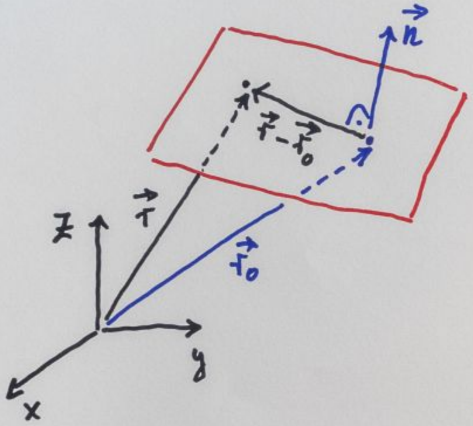
Vektoralgebra

Geometrische Anwendungen mit physikalischer Bedeutung

b) Bestimmung einer Ebene durch Punkt und einen Normalenvektor

$\vec{n}$: Normalenvektor

$\vec{r}-\vec{r}_0$: Vektor in Ebene



$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0$$

$$\vec{r}\cdot\vec{n}=\vec{r}_0\cdot\vec{n}=c\,,\quad c=\text{const}$$

$$n_1x+n_2y+n_3z=c \qquad (*)$$

$$\frac{n_1}{c}x+\frac{n_2}{c}y+\frac{n_3}{c}z=1\,,\quad \text{Achsenabschnittsgleichung}$$

speziell: $y=0=z\,,\quad x=\dfrac{c}{n_1}$

Physik: ebene (ebenfrontige) Wellen

$\vec{n}\Rightarrow\vec{k}$, Wellen(zahl)vektor

$$\vec{k}\vec{r}-\omega t=c$$

t_0: $\vec{k}\vec{r}=c+\omega t_0\equiv c_0$

$t_1>t_0$: $\vec{k}\vec{r}=c+\omega t_1\equiv c_1>c_0$, auslaufende ebene Welle

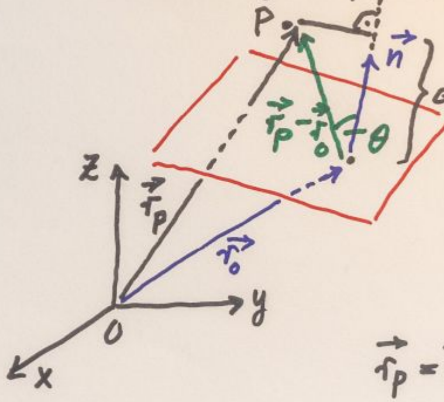
mit Normalen-Einheitsvektor

$$n=\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}$$

aus $(*)$

$$\frac{n_1}{n}x+\frac{n_2}{n}y+\frac{n_3}{n}z=\frac{c}{n}\equiv p\,,\quad \text{Hessesche Normalform}$$

Bedeutung von p: $p=\dfrac{c}{n}=\dfrac{\vec{r}_0\vec{n}}{n}=\dfrac{\vec{n}}{n}\cdot\vec{r}_0$



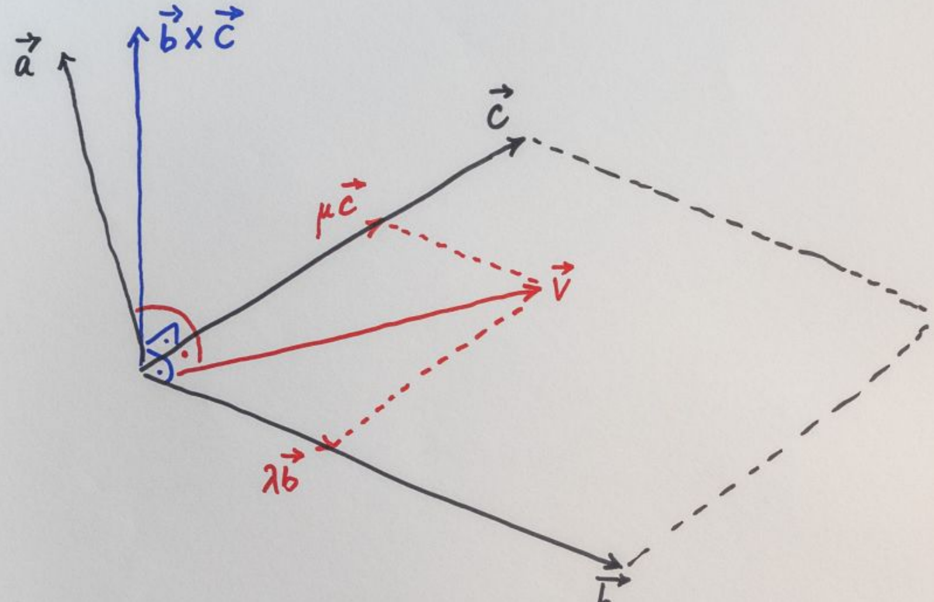
d: Abstand von P von Ebene

$$d=|\vec{r}_P-\vec{r}_0|\cdot\cos\theta$$
$$=\left|(\vec{r}_P-\vec{r}_0)\cdot\frac{\vec{n}}{n}\right|$$

$\vec{r}_P=\vec{0}$: $d=p$

Mehrfachprodukte von Vektoren

a) doppeltes Vektorprodukt $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \equiv \vec{v}$



– $\vec{v} \perp (\vec{b} \times \vec{c}) \rightarrow \vec{v}$ in der von $\vec{b}$ und $\vec{c}$ aufgespannten Ebene

$\vec{v} = \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$

– $\vec{v} \perp \vec{a} \rightarrow \vec{a}\vec{v} = 0$

$$\lambda \cdot \vec{a}\vec{b} + \mu \cdot \vec{a}\vec{c} = 0$$

erfüllbar durch $\lambda = \varkappa \cdot \vec{a}\vec{c}$, $\mu = -\varkappa \cdot \vec{a}\vec{b}$

$$\vec{v} = \varkappa\left[(\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}\right] \qquad (*)$$

Bestimmung von $\varkappa$:

Komponente v_1

$$v_1 = a_2(\vec{b} \times \vec{c})_3 - a_3(\vec{b} \times \vec{c})_2$$
$$= a_2(b_1c_2 - b_2c_1) - a_3(b_3c_1 - b_1c_3)$$
$$= \underline{a_2b_1c_2} - \underline{a_2b_2c_1} - \underline{a_3b_3c_1} + a_3b_1c_3$$

nach (*):

$$v_1 = \varkappa\Big[(\cancel{a_1}c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 - (\cancel{a_1b_1} + a_2b_2 + a_3b_3)c_1\Big]$$
$$= \varkappa\left[\underline{a_2b_1c_2} + a_3b_1c_3 - \underline{a_2b_2c_1} - \underline{a_3b_3c_1}\right]$$

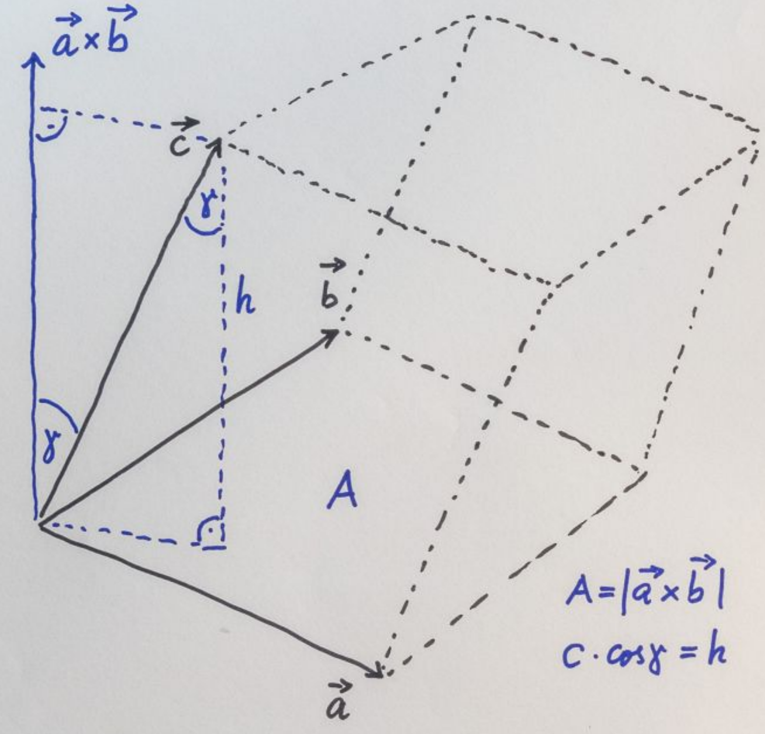
$\rightarrow \underline{\varkappa = 1}$

Resultat:

$$\underline{\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a}\vec{c})\vec{b} - (\vec{a}\vec{b})\vec{c}}$$

Entwicklungssatz

b) Spatprodukt $\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$



Eigenschaften:

$$(\vec{b} \times \vec{c})\vec{a} = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$$

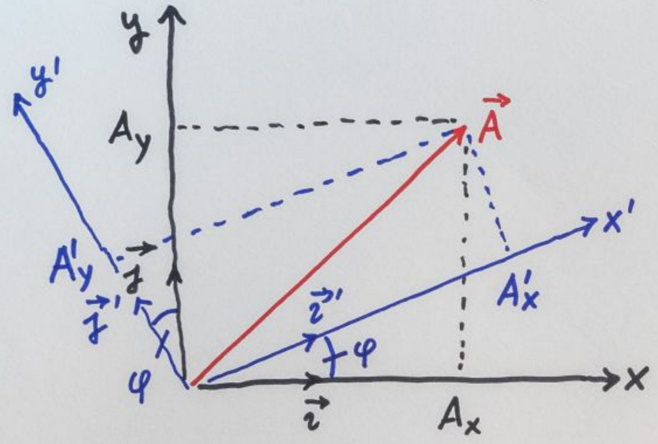
$$(\vec{c} \times \vec{a})\vec{b} = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$$

Parallelepiped, Spat

$$c A \cos\gamma = A \cdot h$$

Volumen des Spates

Vektoren und Drehungen des Koordinatensystems



① $\vec{i}\,' = a\,\vec{i} + b\,\vec{j} \;\Big|\cdot\vec{i}\;\Big|\cdot\vec{j}$

$$a = \vec{i}\,'\cdot\vec{i} = \cos\varphi$$
$$b = \vec{i}\,'\cdot\vec{j} = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) = \sin\varphi$$

$$\vec{j}\,' = c\,\vec{i} + d\,\vec{j}$$
$$c = \vec{j}\,'\vec{i} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\varphi\right) = -\sin\varphi$$
$$d = \vec{j}\,'\vec{j} = \cos\varphi$$

$$\vec{i}\,' = \cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\vec{j}$$
$$\vec{j}\,' = -\sin\varphi\cdot\vec{i} + \cos\varphi\cdot\vec{j}$$

② $\vec{A} = A_x\,\vec{i} + A_y\,\vec{j} = A'_x\,\vec{i}\,' + A'_y\,\vec{j}\,'$

$$A'_x = A_x\cdot\vec{i}\,\vec{i}\,' + A_y\cdot\vec{j}\,\vec{i}\,' = A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi$$
$$A'_y = A_x\cdot\vec{i}\,\vec{j}\,' + A_y\cdot\vec{j}\,\vec{j}\,' = -A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi$$

Vektor: Komponenten transformieren sich wie Basis-Einheitsvektoren.

Umkehrtransformation:
$$\vec{i} = \cos\varphi\cdot\vec{i}\,' - \sin\varphi\cdot\vec{j}\,'$$
$$\vec{j} = \sin\varphi\cdot\vec{i}\,' + \cos\varphi\cdot\vec{j}\,'$$

$$A_x = A'_x\cos\varphi - A'_y\sin\varphi$$
$$A_y = A'_x\sin\varphi + A'_y\cos\varphi$$

Beispiel: $A_x = -y\,,\quad A_y = x$

$$\begin{aligned} A'_x = -y' &= -(-x\sin\varphi + y\cos\varphi) \\ &= x\sin\varphi - y\cos\varphi \\ &= A_y\sin\varphi + A_x\cos\varphi \quad ✓ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A'_y = x' &= x\cos\varphi + y\sin\varphi \\ &= A_y\cos\varphi - A_x\sin\varphi \quad ✓ \end{aligned}$$

A_x, A_y : Vektorkomponenten

Beispiel: $A_x = y\,,\quad A_y = x$

$$A'_x = -A_y\sin\varphi + A_x\cos\varphi$$

$$A'_y = A_y\cos\varphi + A_x\sin\varphi$$

A_x, A_y : <u>keine</u> Vektorkomponenten

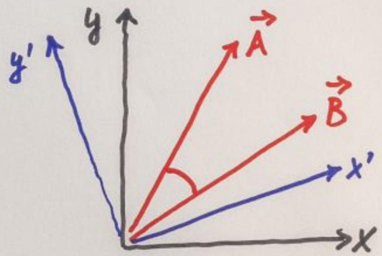
Invarianz bei Drehungen – Skalarprodukt

① Betrag

$$\begin{aligned} |\vec{A}|^2 = \underline{A'^2_x + A'^2_y} &= (A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi)^2 + (-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi)^2 \\ &= A_x^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) + A_y^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &= \underline{A_x^2 + A_y^2} \end{aligned}$$

, Betrag ist Invariante

②



$$\begin{aligned} &\underline{A'_x B'_x + A'_y B'_y} \\ &= (A_x\cos\varphi + A_y\sin\varphi)(B_x\cos\varphi + B_y\sin\varphi) \\ &\quad + (-A_x\sin\varphi + A_y\cos\varphi)(-B_x\sin\varphi + B_y\cos\varphi) \\ &= A_x B_x(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) \\ &\quad + A_y B_y(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \\ &= \underline{A_x B_x + A_y B_y} \end{aligned}$$

, Skalarprodukt ist Invariante

$\vec{A}\cdot\vec{B} = AB\cdot\cos\sphericalangle(\vec{A},\vec{B}) \longrightarrow \sphericalangle(\vec{A},\vec{B})$ invariant