Komplexe Zahlen

Definition und Rechenregeln

quadratische Gleichung

$$z^2 - 2z + 2 = 0$$

$$(z-1)^2 = -1$$

$$z_1 = 1 + \sqrt{-1} = 1 + i = 1 \cdot \underline{1} + 1 \cdot \underline{i} = (1,1)$$

$$z_2 = 1 - \sqrt{-1} = 1 - i = 1 \cdot \underline{1} - 1 \cdot \underline{i} = (1,-1)$$

$i = \sqrt{-1}$, $\boxed{i^2 = -1}$ „imaginäre Einheit"

$\underline{\underline{z = x + i \cdot y}} = (x,y)$ Standard-Darstellung

$x = \mathrm{Re}\, z$, Realteil

$x = 0$: z rein imaginär

$y = \mathrm{Im}\, z$, Imaginärteil

$y = 0$: z rein reell

$z_1 \xrightarrow[i \to -i]{} z_2$, $\left.\begin{array}{l} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{array}\right\}$ konjugiert-komplex

$$\mathrm{Re}\, z = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

$$\mathrm{Im}\, z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) = -\frac{i}{2}(z - \bar{z})$$

$$\underline{\underline{\frac{1}{i}}} = \frac{i}{i \cdot i} = \frac{i}{-1} = \underline{\underline{-i}}$$

Komplexe Zahlen

Rechenregeln

gegeben: $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$

a) $z_1 = z_2$: $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$

b) Addition: $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$

c) Subtraktion: $z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$

d) Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

speziell: $z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \geq 0$
reell

aber: $z^2 = (x+iy)(x+iy)$
$= (x^2 - y^2) + 2ixy$, komplex

e) Division

Kehrwert

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

$\operatorname{Re}\frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\operatorname{Im}\frac{1}{z} = -\frac{y}{x^2+y^2}$

Beispiel: $\frac{1}{i} \rightarrow z = i$, $x = 0$, $y = 1$

$\operatorname{Re}\frac{1}{i} = 0$, $\operatorname{Im}\frac{1}{i} = -\frac{1}{1} = -1$

$\left(\frac{1}{i} = -i\right)$

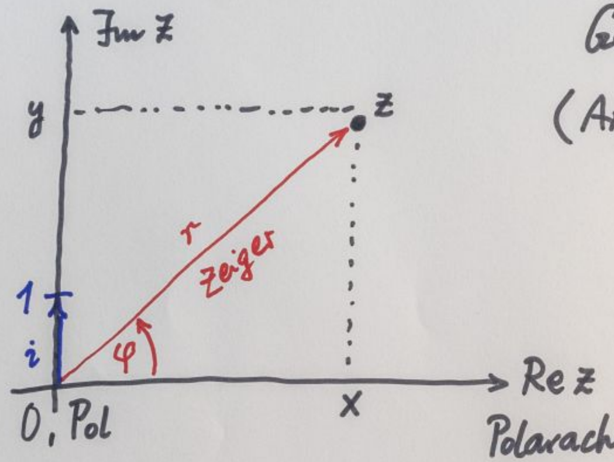
Quotient

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Komplexe Zahlen

Gaußsche Zahlenebene und Polarkoordinaten

graphische Darstellung: $z = x + iy$



Gaußsche Zahlenebene (Argand-Diagramm)

Abszisse: Re z

Ordinate: Im z

r, φ : Polarkoordinaten

$r = |z|$ Betrag von z $\rightarrow$ $r^2 = x^2 + y^2$

$\varphi = \arg z$ Argument von z | $z\bar{z} = x^2 + y^2$

$\Big\} \; z\bar{z} = r^2$

Gleichheit: $|z_1| = |z_2|$

$\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi \cdot n$, n ganz

Hauptwert von $\arg z$: $0 \leq \varphi < 2\pi$

Polardarstellung

$$\left.\begin{array}{l} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{array}\right\} \frac{y}{x} = \tan\varphi$$

$$\underline{\underline{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}$$

$$|\cos\varphi + i\sin\varphi| = \sqrt{(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\varphi - i\sin\varphi)}$$

$$= \sqrt{\cos^2\varphi + \sin^2\varphi} = 1$$

Beispiel: $z = i$, $r = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{-i^2}$

$= 1$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 = \cos\varphi \\ y = 1 = \sin\varphi \end{array}\right\} \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Komplexe Zahlen

Polardarstellung

Multiplikation

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$$

$$= r_1 r_2 \left[(\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 - \sin\varphi_1 \sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_1 \sin\varphi_2) \right]$$

Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen

$$= r_1 r_2 \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \right] = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$\longrightarrow \quad r = r_1 r_2 \,, \quad \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$$

Division $\frac{z_1}{z_2} \longrightarrow \quad r = \frac{r_1}{r_2} \,, \quad \varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

Komplexe Zahlen

Die Formeln von Euler und Moivre

Eulersche Formel

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (*)$$

$$f'(\varphi) \equiv \frac{df}{d\varphi} = -\sin\varphi + i\cos\varphi$$

$$= i(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$f'(\varphi) = i\, f(\varphi)$$

Ansatz: $$f(\varphi) = k \cdot e^{i\varphi} \qquad (**)$$

$$f'(\varphi) = i k e^{i\varphi} = i f(\varphi)$$

Konstante k: $$\left.\begin{array}{l} \varphi = 0 \rightarrow f(0) = 1 \text{ aus } (*) \\ \rightarrow f(0) = k \text{ aus } (**) \end{array}\right\} \underline{k = 1}$$

$$\underline{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}} \quad \text{Eulersche Formel}$$

$$\underline{\underline{z = r \cdot e^{i\varphi}}} \quad \text{Exponentialdarstellung}$$

Beispiele:

- $z = i: \quad r = 1,\ \varphi = \frac{\pi}{2}$

  $$i = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

- $z = -1: \quad r = 1,\ \varphi = \pi$

  $$-1 = e^{i\pi}, \quad \underline{e^{i\pi} + 1 = 0}$$

Komplexe Zahlen

Die Formel von Moivre

$$\cos\varphi + i\sin\varphi \;:\quad \varphi \rightarrow n\cdot\varphi \;, \quad \underline{n = 0, 1, 2, \ldots}$$

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = e^{in\varphi} = \left(e^{i\varphi}\right)^n = \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n$$

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}\,\frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n} = \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{1}$$

, gerade und ungerade Funktionen

$$= \left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right]^n = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)$$

$$\underline{\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)} \;, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

, Moivresche Formel

Beispiel: $(-1+i)^{-8}$?

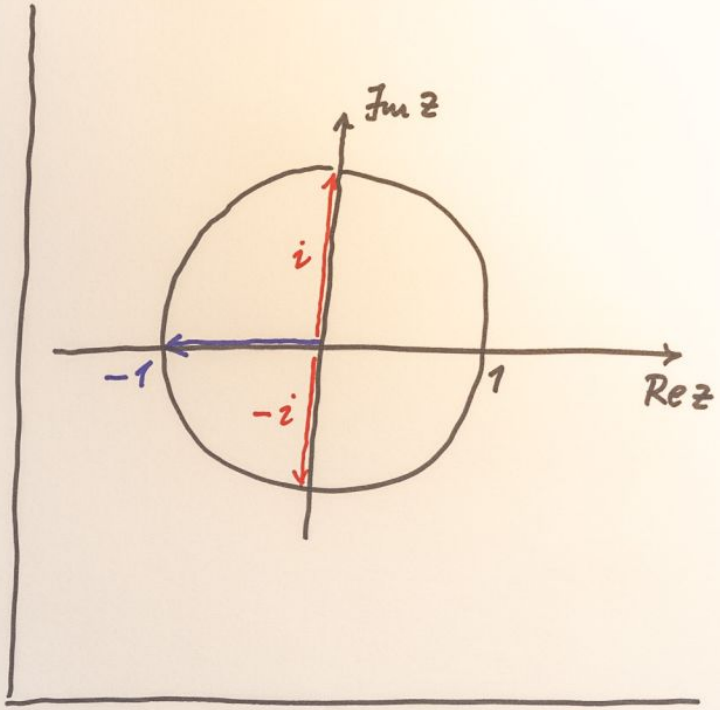
$z = -1+i \;:\quad r = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 = r\cos\varphi \\ y = +1 = r\sin\varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cos\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \longrightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

$$(-1+i)^{-8} = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^{-8} = \frac{1}{16}\, e^{-6\pi i} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$

Komplexe Zahlen

Radizieren komplexer Zahlen. Kreisteilung



$$z = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = s(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = s^n(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)^n$$

$$= s^n\left[\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta)\right], \text{ Moivre}$$

Vergleich: $s = \sqrt[n]{r}$, $\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \cos(n\vartheta) \\ \sin\varphi = \sin(n\vartheta)\end{array}\right\}$ $n\vartheta = \varphi + 2\pi \cdot k$, k ganz

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + 2\pi \cdot \frac{k}{n} \quad , \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$$

n verschiedene Werte

$$z_k = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + 2\pi\frac{k}{n}\right)\right]$$

Beispiele: 1) $\sqrt{-1}$: $n = 2$, $k = 0, 1$

$r = 1$, $\varphi = \pi$

$$\sqrt{-1} = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi \cdot k\right) \quad \begin{cases} k=0 & \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i \\ k=1 & \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i \end{cases}$$

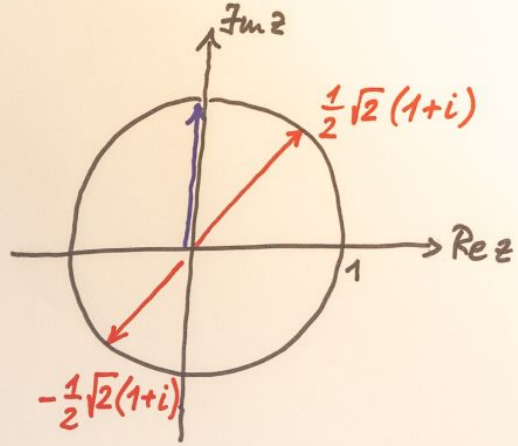
Komplexe Zahlen

Kreisteilung: Beispiele

2) $\sqrt{i}$: $n = 2$, $k = 0, 1$

$r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{i} = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi k\right) \quad \begin{cases} k=0 & \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i) \\ k=1 & \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i) \end{cases}$$



3) n-te Einheitswurzeln

$\sqrt[n]{1}$: n, $k = 0, 1, \dots, (n-1)$

$r = 1$, $\varphi = 0$

$$\sqrt[n]{1} = \cos\left(2\pi \frac{k}{n}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{k}{n}\right)$$

reell. $k = 0$: $z_0 = 1$

$2\pi \frac{k}{n} \overset{!}{=} \pi \rightarrow n = 2k$ gerade : $z_{n/2} = -1$

komplex: $j < \frac{n}{2}$ ganz : $z_j = \cos\left(2\pi \frac{j}{n}\right) + i \sin\left(2\pi \frac{j}{n}\right)$

$$z_{n-j} = \cos \frac{2\pi(n-j)}{n} + i \sin \frac{2\pi(n-j)}{n}$$

$$= \underbrace{\cos 2\pi}_{1} \cos \frac{2\pi j}{n} + \cancel{\sin 2\pi} \sin \frac{2\pi j}{n} + i \left[\cancel{\sin 2\pi} \cos \frac{2\pi j}{n} - \underbrace{\cos 2\pi}_{1} \sin \frac{2\pi j}{n} \right]$$

(Additionstheoreme)

$$z_{n-j} = \cos \frac{2\pi j}{n} - i \sin \frac{2\pi j}{n} = \bar{z}_j$$

Kreisradius $\sqrt[n]{r}$

n Punkte

Komplexe Zahlen

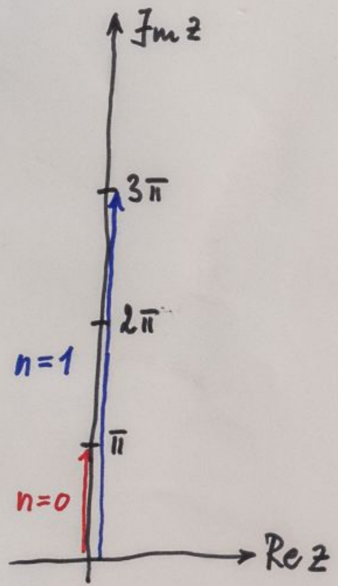
Funktionen mit komplexen Argumenten

Exponentialdarstellung $-1 = e^{i\pi} \cdot 1 = e^{i\pi} \cdot e^{2\pi n i} = e^{i\pi(1+2n)}$

$$\underline{\underline{1 = e^{2\pi n i}}}, \quad n \text{ ganz}$$

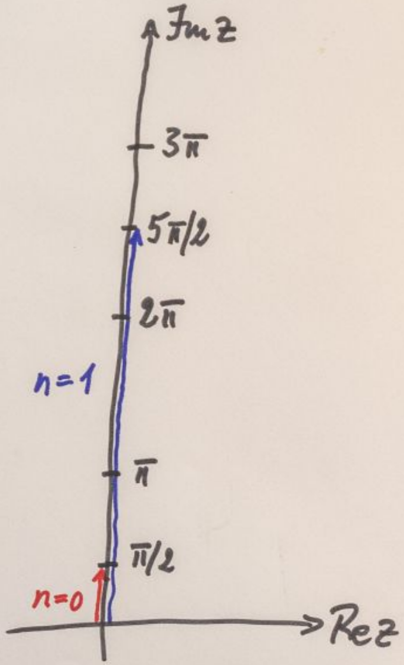
$$= \underbrace{\cos 2\pi n}_{1} + i \underbrace{\sin 2\pi n}_{0}$$

Logarithmus: $\ln(-1) = i\pi(1+2n)$



$$i = e^{i\frac{\pi}{2}} \cdot e^{2\pi n i} = e^{i\pi\left(\frac{1}{2}+2n\right)}$$

$$\ln i = i\pi\left(\tfrac{1}{2}+2n\right)$$



Komplexe Zahlen

Funktionen mit komplexen Argumenten — Teil 2

Eulersche Formel $\quad \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

konj.-komplex $\quad \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi} \quad \Big| + \Big| -$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \cosh(i\varphi)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) = -i\sinh(i\varphi)$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 = \cosh^2(i\varphi) + (-i)^2\sinh^2(i\varphi)$$
$$= \cosh^2(i\varphi) - \sinh^2(i\varphi)$$

Beispiel: $\quad \cosh z = -1 \quad ? \quad$ keine reelle Lösung

$$\frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) = -1$$
$$e^{z} + e^{-z} = -2$$
$$e^{z} + e^{-z} + 2 = 0 \quad \Big|\, e^{z}$$
$$e^{2z} + 1 + 2e^{z} = 0$$
$$\left(e^{z} + 1\right)^2 = 0$$
$$e^{z} = -1$$

$$z = \ln(-1)$$
$$z = (2n+1)\pi \cdot i \quad , \quad n \text{ ganz}$$