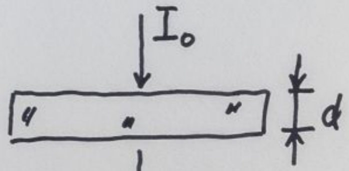
Die Exponentialfunktion

Definition und Eigenschaften

Physikalisches Einführungsbeispiel



I_0: Intensität des auftreffenden Lichtes

pI_0, $0 \le p \le 1$, absorbiertes Licht

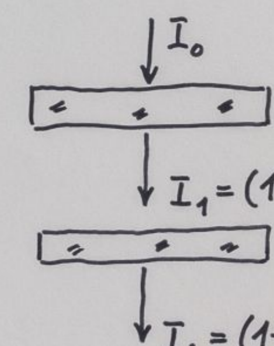
$I_1 = (1-p)I_0$

durchgelassener Anteil

$p = \alpha \cdot d$ „dünn"

α: Materialkonstante

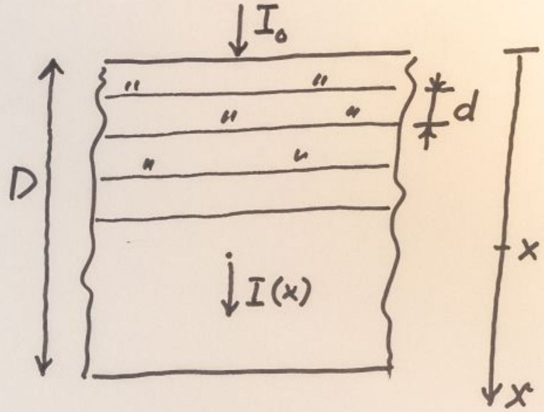
$\dim \alpha = \frac{1}{\text{Länge}}$



$I_1 = (1-p)I_0$

$I_2 = (1-p)I_1 = (1-p)^2 I_0$

„dicker" Glasblock



$\frac{x}{d}$ Schichten

$$I(x) = I_0 (1-p)^{\frac{x}{d}} \quad , \quad d = \frac{p}{\alpha}$$

$$= I_0 (1-p)^{\frac{\alpha x}{p}}$$

$$= I_0 (1-p)^{-\frac{1}{p}(-\alpha x)}$$

$$= I_0 \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}}\right]^{-\alpha x}$$

$$I(x) = \lim_{\substack{p \to 0 \\ (d \to 0)}} I_0 \left[(1-p)^{-\frac{1}{p}}\right]^{-\alpha x}$$

$$= I_0 \left[\lim_{p \to 0} (1-p)^{-\frac{1}{p}}\right]^{-\alpha x}$$

p	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1-p)^{-\frac{1}{p}}$	2,86797	2,73199	2,71964	2,71841	2,71829

Eülersche Zahl: $e = \lim_{p \to 0} (1-p)^{-\frac{1}{p}} \approx 2{,}7182818\ldots$

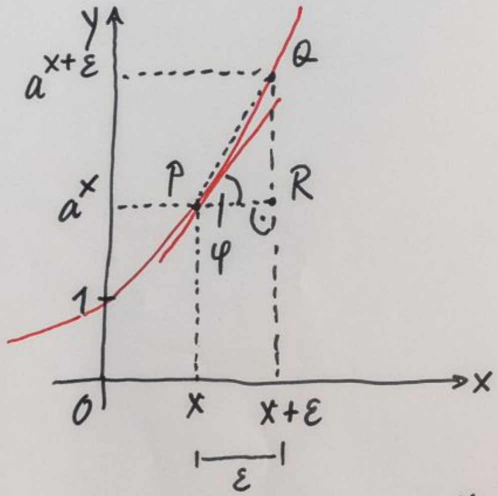
$$I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$$

Die Exponentialfunktion

Definition und Eigenschaften

Mathematisches Einführungsbeispiel

$$y = f(x) = a^x \quad , \ (a>1)$$



speziele Basis a_0:

für beliebige x Anstieg (Wachstumsrate) gleich a_0^x ?

Wachstumsrate $\dfrac{\overline{QR}}{\overline{PR}}$

$$\frac{\overline{QR}}{\overline{PR}} = \frac{a_0^{x+\varepsilon} - a_0^x}{(x+\varepsilon) - x} = \frac{a_0^x \cdot a_0^\varepsilon - a_0^x}{\varepsilon} \approx a_0^x$$

$$\frac{a_0^\varepsilon - 1}{\varepsilon} \approx 1$$

$$a_0^\varepsilon \approx 1 + \varepsilon$$

$$a_0 \approx (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

$$a_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$$

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001
$(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}}$	2,59374	2,70481	2,71692	2,71814	2,71826

Eulersche Zahl: $e = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} (1+\varepsilon)^{\frac{1}{\varepsilon}} = 2{,}7182818\ldots$

Resultat: $a_0 = e \ , \quad y = f(x) = e^x$

beliebige Basis: $y = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}$

Ableitung: $y' = \dfrac{d}{dx} e^x = e^x = y$

Die Exponentialfunktion

Wachstum und Zerfall

$$y = A e^{cx} \quad , \quad A = \text{const} = y(0)$$

$$\dim A = \dim y$$

$$c = \text{const} \begin{cases} >0 & \text{exp. Wachstum} \\ <0 & \text{exp. Zerfall} \end{cases}$$

$$\underline{\underline{y'}} = \frac{dy}{dx} = Ace^{cx} = \underline{\underline{cy}}$$

Beispiel: $I(x) = I_0 e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, $c = -\alpha < 0$ Zerfall

$$I'(x) = -\alpha I(x)$$

Wachstum: $y = Ae^{ct}$, $c > 0$

Verdopplungszeit $T_{(2)}$

$$y(t_0 + T_{(2)}) \stackrel{!}{=} 2y(t_0)$$

$$Ae^{c(t_0 + T_{(2)})} = 2Ae^{ct_0}$$

$$e^{cT_{(2)}} = 2$$

$$cT_{(2)} = \ln 2$$

$$T_{(2)} = \frac{1}{c} \ln 2$$

Zerfall: $y = Ae^{-ct}$, $c > 0$

Halbwertszeit $T_{(1/2)}$

$$y(t_0 + T_{(1/2)}) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2} y(t_0)$$

$$Ae^{-c(t_0 + T_{(1/2)})} = \frac{1}{2} Ae^{-ct_0}$$

$$e^{-cT_{(1/2)}} = \frac{1}{2}$$

$$-cT_{(1/2)} = \ln \frac{1}{2} = -\ln 2$$

$$T_{(1/2)} = \frac{1}{c} \ln 2$$

$$y' = cy + d \quad , \quad d = \text{const}$$

$$y' = c\left(y + \frac{d}{c}\right)$$

$$\left(y + \frac{d}{c}\right)' = c\left(y + \frac{d}{c}\right) \quad , \quad y + \frac{d}{c} \equiv z$$

$$z' = cz$$

$$z = Ae^{cx} = y + \frac{d}{c}$$

$$\underline{\underline{y = Ae^{cx} - \frac{d}{c}}}$$

Probe: L.H.S. $y' = Ace^{cx}$

R.H.S. $c\left(Ae^{cx} - \frac{d}{c}\right) + d$

$$= Ace^{cx} - d + d$$

$$= Ace^{cx}$$