Integrationstechniken

Substitutionsmethode – „Integration der Kettenregel"

Kettenregel: $\frac{d}{dx} F[u(x)] = \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

$$\int \frac{dF}{du} \cdot \frac{du}{dx}\, dx = F[u(x)] + C$$

$\frac{dF}{du} = f(u)$: $\int f(u)\, du = F(u) + C$

$$\int f(u) \cdot \frac{du}{dx}\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C$$

Strategie: Läßt sich im Integranden neue Variable $u = u(x)$ so einführen, daß $\frac{du}{dx}$ als Faktor zusammen mit einer Funktion $f(u)$ auftritt, deren Integral bekannt oder leichter bestimmbar?

Beispiele:

a) $\int 2x\sqrt{x^2+1}\, dx$, Substitution: $u = x^2+1$

$\frac{du}{dx} = 2x$

$$\int \underbrace{2x}_{\frac{du}{dx}} \underbrace{\sqrt{x^2+1}}_{f(u)=\sqrt{u}}\, dx$$

$$= \int \sqrt{u}\, du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

$$= \frac{2}{3}(x^2+1)^{3/2} + C$$

b) Translation des Arguments: $\int f(x+a)\, dx$

Substitution: $u = x+a$, $\frac{du}{dx} = 1$

$$\int f(x+a)\, dx = \int f(u)\, du = F(u) + C = F(x+a) + C$$

c) Skalierung des Arguments

$\int f(ax)\, dx$, Substitution: $u = ax$, $\frac{du}{dx} = a$

$$= \frac{1}{a}\int a f(ax)\, dx$$

$$= \frac{1}{a} F(u) + C = \frac{1}{a} F(ax) + C$$