

Substitutionsmethode - Teil 2

Logarithmische Integration

Logarithmische Ableitung: $\frac{d}{dx} \ln u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln|u(x)| + C = \int \frac{du}{u}$$

Strategie: Ist Integrand so, daß Zähler Ableitung des Nenners ist?

Beispiele:

a) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx$
 $= - \ln|\cos x| + C$

b) $\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx$
 $= \ln|\sin x| + C$

Anmerkungen:

a) „Routine“

Substituieren: $u = g(x)$; $\frac{du}{dx} = g'(x)$, $dx = \frac{dx}{du} du$

$$\int h(x) dx = \int \frac{h(x)}{g'(x)} du = \int f(u) du$$

Beispiel:

$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$, Substitution: $u = 1 + \ln x = g(x)$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} = g'(x)$$

$$= \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} \cdot x du$$

$$= \int \sqrt{u} du = \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{3} (1 + \ln x)^{3/2} + C$$