Potenzreihen-Entwicklungen. Taylor-Polynome

$f(x)$: stetig, differenzierbar

Potenzreihen-Ansatz. $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$

Beispiel: $f(x) = \sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$, $a_0 = 1$

$a_1 = -\frac{1}{2}$

Entwicklungskoeffizienten:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots \\
f'(x) &= a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \dots \\
f''(x) &= 2a_2 + 2\cdot 3\, a_3 x + 3\cdot 4\, a_4 x^2 + \dots \\
f'''(x) &= 2\cdot 3\, a_3 + 2\cdot 3\cdot 4\, a_4 x + \dots
\end{aligned}
$$

$x = 0$:

$$
\left.
\begin{aligned}
f(0) &= a_0 \\
f'(0) &= a_1 \\
f''(0) &= 2a_2 \\
f'''(0) &= 2\cdot 3\, a_3 \\
&\vdots
\end{aligned}
\right\}
$$

allgemeines Bildungsgesetz

$$f^{(n)}(0) = 1\cdot 2\cdot 3 \dots \cdot n \cdot a_n = n! \cdot a_n$$

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0)\cdot x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$