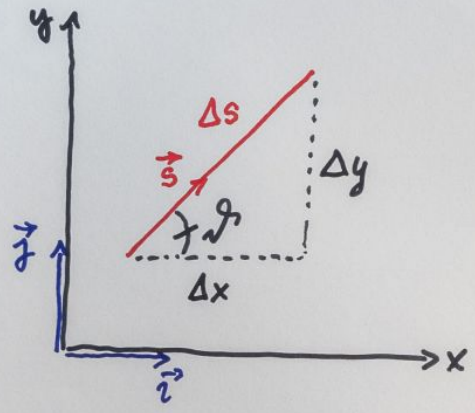
Richtungsableitung. Gradient

$z = f(x,y)$



$$\vec{s} = \cos\vartheta\,\vec{i} + \sin\vartheta\,\vec{j}$$

$$\cos\vartheta = \frac{\Delta x}{\Delta s}$$

$$\sin\vartheta = \frac{\Delta y}{\Delta s}$$

$$\Delta z \approx \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\Delta y \quad \Big| \cdot\frac{1}{\Delta s}$$

$$\frac{\Delta z}{\Delta s} \approx \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\sin\vartheta$$

Richtungsableitung:

$$\frac{dz}{ds} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta s} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j}\right)\left(\cos\vartheta\,\vec{i} + \sin\vartheta\,\vec{j}\right)$$

a) $\vartheta = 0$: $\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}$

$\vartheta = \frac{\pi}{2}$: $\frac{dz}{ds} = \frac{\partial f}{\partial y}$

b) Höhenlinien? $\frac{dz}{ds} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}\cos\vartheta_h + \frac{\partial f}{\partial y}\sin\vartheta_h = 0$$

$$\tan\vartheta_h = -\frac{f_x}{f_y}$$

c) Anstieg maximal?

$$\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dz}{ds}\right) = 0$$

$$-f_x\sin\vartheta_m + f_y\cos\vartheta_m = 0$$

$$\tan\vartheta_m = \frac{f_y}{f_x}$$

$$\tan\vartheta_h \cdot \tan\vartheta_m = -1$$

Richtung des steilsten Anstiegs senkrecht auf Höhenlinien