Zur Leibniz-Notation $\frac{d^2y}{dx^2}$

Beispiel: Freier Fall

zweite Differenzenfolge konstant

Ansatz: $s_n = b\,(n\cdot\Delta t)^2\,,\quad b = \text{const}$

1. Differenzenfolge:
$$\Delta s_n = s_{n+1} - s_n = b\left[(n+1)\Delta t\right]^2 - b\,(n\cdot\Delta t)^2$$
$$= b\left[\cancel{n^2} + 2n + 1 - \cancel{n^2}\right](\Delta t)^2$$
$$= b\cdot(2n+1)\,(\Delta t)^2$$

2. Differenzenfolge:
$$\Delta(\Delta s_n) \equiv \Delta^2 s_n = \Delta s_{n+1} - \Delta s_n = s_{n+2} - 2s_{n+1} + s_n$$
$$= b\left[(n+2)\Delta t\right]^2 - 2b\left[(n+1)\Delta t\right]^2 + b\,(n\cdot\Delta t)^2$$
$$= b\left[\cancel{n^2} + \cancel{4n} + 4 - 2(\cancel{n^2} + \cancel{2n} + 1) + \cancel{n^2}\right](\Delta t)^2$$
$$= 2b\,(\Delta t)^2 = \text{const} \neq 0$$

$$\frac{\Delta^2 s_n}{(\Delta t)^2} = 2b \xrightarrow{\Delta t \to 0} \frac{d^2 s}{(dt)^2} \equiv \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$\left.\begin{aligned} \Delta t &= \tfrac{1}{30}\,s \\ \Delta^2 s_n &\approx 1{,}1\,\text{cm} \end{aligned}\right\} \quad \frac{\Delta^2 s_n}{(\Delta t)^2} \approx 990\,\frac{\text{cm}}{s^2}$$

$$2b \approx 9{,}9\,\frac{m}{s^2} \approx g \quad \left(= 9{,}81\,\frac{m}{s^2}\right)$$