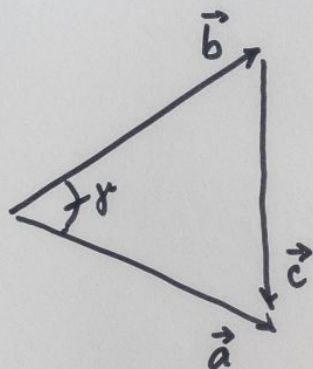


Vektoralgebra

Skalarprodukt

Frage: Winkel zwischen zwei Vektoren durch Komponenten ausdrücken?



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\text{cos-Satz: } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$\begin{aligned} 2ab \cos \gamma &= a^2 + b^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \\ &\quad - (a_1 - b_1)^2 - (a_2 - b_2)^2 - (a_3 - b_3)^2 \end{aligned}$$

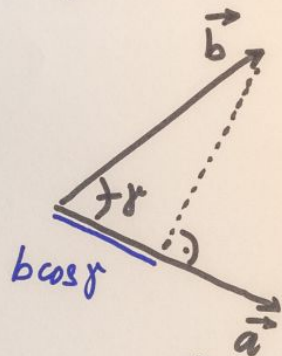
$$\underline{ab \cos \gamma = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \equiv \vec{a} \cdot \vec{b}}, \text{ Skalarprodukt}$$

$$\cos \gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{ab}$$

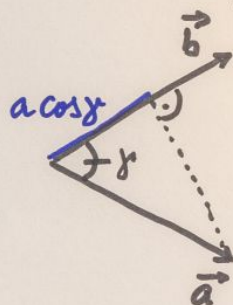
$$= \frac{a_1}{a} \cdot \frac{b_1}{b} + \frac{a_2}{a} \cdot \frac{b_2}{b} + \frac{a_3}{a} \cdot \frac{b_3}{b}$$

$$\underline{\cos \gamma = \frac{\vec{a}}{a} \cdot \frac{\vec{b}}{b}}, \text{ Produkt zweier Einheitsvektoren}$$

geometrische Interpretation



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a(b \cos \gamma)$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = b(a \cos \gamma)$$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b}$:

Produkt aus Betrag eines der beiden Faktoren und der Projektion des anderen Faktors auf diesen

- Skalar
- $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$, kommutativ
- $(\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \neq \vec{a} (\vec{b} \cdot \vec{c})$, nicht assoziativ
- $\vec{a} \perp \vec{b}, \gamma = \frac{\pi}{2}$
- $\underline{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0}$, Orthogonalität