Komplexe Zahlen

Die Formel von Moivre

$$\cos\varphi + i\sin\varphi \;:\quad \varphi \to n\cdot\varphi \;,\quad \underline{n = 0, 1, 2, \ldots}$$

$$\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi) = e^{in\varphi} = \left(e^{i\varphi}\right)^n = \left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n$$

$$\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^{-n} = \frac{1}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n}\,\frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n} = \frac{(\cos\varphi - i\sin\varphi)^n}{1}$$, gerade und ungerade Funktionen

$$= \left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right]^n = \cos(-n\varphi) + i\sin(-n\varphi)$$

$$\underline{\left(\cos\varphi + i\sin\varphi\right)^n = \cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)} \;,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$, Moivresche Formel

Beispiel: $(-1+i)^{-8}$?

$z = -1 + i \;:\quad r = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l} x = -1 = r\cos\varphi \\ y = +1 = r\sin\varphi \end{array}\right\} \begin{array}{l} \cos\varphi = -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{array} \longrightarrow \varphi = \frac{3}{4}\pi$$

$$(-1+i)^{-8} = \left(\sqrt{2}\, e^{\frac{3}{4}\pi i}\right)^{-8} = \frac{1}{16}\, e^{-6\pi i} = \underline{\underline{\frac{1}{16}}}$$