Komplexe Zahlen

Die Formeln von Euler und Moivre

Eulersche Formel

$$f(\varphi) = \cos\varphi + i\sin\varphi \qquad (*)$$

$$f'(\varphi) \equiv \frac{df}{d\varphi} = -\sin\varphi + i\cos\varphi$$
$$= i(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

$$f'(\varphi) = i\,f(\varphi)$$

Ansatz: $f(\varphi) = k \cdot e^{i\varphi} \qquad (**)$

$$f'(\varphi) = ik\,e^{i\varphi} = i f(\varphi)$$

Konstante k: $\varphi = 0$ $\left.\begin{array}{l} \rightarrow f(0) = 1 \text{ aus } (*) \\ \rightarrow f(0) = k \text{ aus } (**) \end{array}\right\} \underline{k = 1}$

$$\underline{\cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}}$$ Eulersche Formel

$$\underline{\underline{z = r \cdot e^{i\varphi}}}$$ Exponentialdarstellung

Beispiele:

- $z = i$: $r = 1$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

  $$i = e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}$$

- $z = -1$: $r = 1$, $\varphi = \pi$

  $$-1 = e^{i\pi}, \quad \underline{e^{i\pi} + 1 = 0}$$