Komplexe Zahlen

Funktionen mit komplexen Argumenten – Teil 2

Eulersche Formel $\quad \cos\varphi + i\sin\varphi = e^{i\varphi}$

konj.-komplex $\quad \cos\varphi - i\sin\varphi = e^{-i\varphi} \quad \Big|\; + \;\Big|\; -$

$$\cos\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}\right) = \cosh(i\varphi)$$

$$\sin\varphi = \frac{1}{2i}\left(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}\right) = -i\sinh(i\varphi)$$

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1 = \cosh^2(i\varphi) + (-i)^2\sinh^2(i\varphi)$$

$$= \cosh^2(i\varphi) - \sinh^2(i\varphi)$$

Beispiel: $\quad \cosh z = -1 \quad ? \quad$ keine reelle Lösung

$$\frac{1}{2}\left(e^{z} + e^{-z}\right) = -1$$

$$e^{z} + e^{-z} = -2$$

$$e^{z} + e^{-z} + 2 = 0 \quad \Big|\; e^{z}$$

$$e^{2z} + 1 + 2e^{z} = 0$$

$$\left(e^{z} + 1\right)^2 = 0$$

$$e^{z} = -1$$

$$z = \ln(-1)$$

$$z = (2n+1)\pi \cdot i \quad , \quad n \text{ ganz}$$