Mathematische Methoden der Physik

Teil 1:

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Karl-Heinz Lotze

Stand: 8. Juni 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Beispiele, Begriffe und geometrische Bedeutung

Wir präsentieren einleitend eine kleine Liste von Differentialgleichungen, die sämtlich in der Physik eine Rolle spielen, die Repräsentanten verschiedener Typen von Differentialgleichungen sind und die wir – mit Ausnahme der einen partiellen Differentialgleichung – nachfolgend alle behandeln werden. Sodann stellen wir das Vokabular zusammen, mit dessen Hilfe wir Differentialgleichungen beschreiben und charakterisieren können. Schließlich geben wir eine geometrische Vorstellung davon, was es heißt, eine Differentialgleichung zu lösen.

1.1 Beispiele

1. $y' - cy = 0\,, \quad c = \text{const}$	Wachstum und Zerfall
2. $y' - cy = d\,, \quad d = \text{const}$	Wachstum und Zerfall mit konstanter Zufuhr
3. $m\dot{v} + \gamma v = mg$	freier Fall mit Reibung
4. $L\dot{I} + RI = U_0 \sin \omega t$	R-L-Schwingkreis
5. $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$	freie, ungedämpfte Schwingung
6. $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = 0$	freie, gedämpfte Schwingung
7. $L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \dfrac{Q}{C} = 0$	L-R-C-Schwingkreis
8. $m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos \omega t$	erzwungene Schwingung
9. $\ell\ddot{\varphi} + g \sin \varphi = 0$	nichtlineare Pendelschwingung
10. $\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$	Wellengleichung

Anmerkungen

a) Im Laufe dieses Kapitels werden wir mit Ausnahme von Gleichung (10) alle Beispiele behandeln.

b) Die Beispiele (1) und (2) sind uns bereits aus unserem Vorkurs „Mathematik für Studienanfänger“ bekannt. Dort haben wir die Frage gestellt, ob es für eine Exponentialfunktion $y = a^x$ eine spezielle Basis $a_0 \equiv e$ gibt, sodaß die Ableitung (Wachstumsrate, Anstieg der Tangente) von $y = a_0^x$ für beliebige x gleich a_0^x ist. Die Verallgemeinerung von Beispiel (1), nämlich das Beispiel (2) haben wir durch eine Variablentransformation auf die gleiche Frage zurückführen können. Das Ergebnis ist

$$y = Ae^{cx} - \frac{d}{c},$$

woraus sich für $d = 0$ auch die Lösung für Beispiel (1) ergibt.

c) Bei bloßer Betrachtung der Differentialgleichungen aus unserer Liste stellen wir fest, daß sich beispielsweise die Gleichungen (2) und (3) strukturell ähneln, obwohl die Bedeutung der Symbole ganz unterschiedlich ist. Gleiches trifft auf die Gleichungen (6) und (7) zu: Die Induktivität L korrespondiert mit der trägen Masse m, der Ohmsche Widerstand R mit dem Reibungskoeffizienten γ und der Kehrwert der Kapazität C mit der Federkonstanten k. Außerdem ist Gleichung (5) ein Spezialfall von Gleichung (6) für $\gamma = 0$. Bei der Behandlung solcher analogen Probleme bringt der Ausspruch von R. P. Feynman „*The same equations have the same solutions*“ eine wesentliche Erleichterung.

1.2 Begriffe

Gewöhnlich vs. partiell Wenn die gesuchte Funktion von nur einer unabhängigen Variablen abhängt, z.B. $y = y(x)$ oder $x = x(t)$, heißt eine Differentialgleichung „*gewöhnlich*“, denn dann treten nur gewöhnliche Ableitungen auf. Bei mehreren unabhängigen Variablen, z.B. $\phi = \phi(x, y, z, t)$, heißt eine Differentialgleichung „*partiell*“, weil vorkommende Ableitungen partielle Ableitungen sind. In diesem Sinne ist Beispiel (10) eine partielle Differentialgleichung, alle anderen Beispiele sind gewöhnliche Differentialgleichungen.

Ordnung Die Ordnung einer Differentialgleichung wird durch die höchste vorkommende Ableitung bestimmt. Die Beispiele (1)...(4) sind danach von 1. Ordnung, die Beispiele (5)...(10) von 2. Ordnung.

Linear vs. nichtlinear Eine Differentialgleichung heißt „*linear*“, wenn die gesuchte Funktion y und alle ihre Ableitungen nur in 1. Potenz vorkommen. Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung 1. Ordnung ist

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

worin $P(x)$ und $Q(x)$ durchaus nichtlineare Funktionen sein können. Die Eigenschaft der Linearität oder Nichtlinearität richtet sich nach der abhängigen Variablen.

Die allgemeine Form einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist

$$ay'' + by' + cy = F(x).$$

Natürlich können auch in einer solchen Differentialgleichung die Koeffizienten Funktionen von x sein. Mit diesem Fall werden wir uns in diesem Kapitel jedoch nicht beschäftigen.

Die Beispiele (1)...(8) und (10) sind demnach linear. Nur das Beispiel (9) ist nichtlinear, da die gesuchte Funktion $\varphi(t)$ nicht direkt, sondern in der Form $\sin\varphi$ auftritt. Wir werden dieses Beispiel in linearer Näherung diskutieren, in der es dem Beispiel (5) strukturell ähnlich ist.

Homogen vs. inhomogen Eine Differentialgleichung heißt „*inhomogen*“, wenn die unabhängige Variable nicht nur in der gesuchten Funktion y, deren Ableitungen und eventuell deren Koeffizienten vorkommt, sondern auch explizit wie in $Q(x)$ oder $F(x)$. Dabei kann die Inhomogenität auch eine Konstante sein. Tritt eine solche Inhomogenität nicht auf, heißt die Differentialgleichung „*homogen*“. Die Beispiele (1), (5)...(7), (9) und (10) sind homogene, (2)...(4) und (8) inhomogene Differentialgleichungen.

Integral vs. Quadratur Die Lösung einer Differentialgleichung ist eine *Funktion*, die man „*Integral*“ der Differentialgleichung nennt. Falls die Lösung nur als Integral im üblichen Sinne darstellbar ist, das nicht durch bekannte Funktionen ausgedrückt werden kann, sagt man, daß die Differentialgleichung „auf eine *Quadratur* zurückgeführt“ wurde.

Allgemeine Lösung vs. Partikulärlösung Die allgemeine Lösung einer Differentialgleichung 1. Ordnung enthält eine, die allgemeine Lösung einer Gleichung 2. Ordnung zwei *Integrationskonstanten*. Die spezielle oder *Partikulärlösung* entsteht, wenn die Konstanten aus den *Anfangs-* oder *Rand-Bedingungen* bestimmt werden.

Eine Differentialgleichung lösen heißt, aus Differentialgleichung *und den Anfangsbedingungen* eine Funktion zu bestimmen, die diese Differentialgleichung erfüllt.

Beispiel Zur Illustration betrachten wir das Beispiel (1) unserer Liste mit der allgemeinen Lösung $y = Ae^{cx}$, $(A = \text{const})$. Ist für einen bestimmten Wert $x = x_0$ der unabhängigen Variablen der Funktionswert $y(x_0) = y_0$ gegeben, ergibt sich die Konstante A aus

$$y(x_0) = Ae^{cx_0} \stackrel{!}{=} y_0 \quad \text{zu} \quad A = y_0\, e^{-cx_0}\,,$$

und die spezielle Lösung für diesen Fall ist

$$y(x) = y_0\, e^{c(x-x_0)}\,.$$

Oftmals wird der y-Wert für $x_0 = 0$ angegeben und als „Anfangswert“ bezeichnet. Dann ist für $y_0 = y(0)$

$$y(x) = y(0)\, e^{cx}\,.$$

Am Ende dieses Abschnitts zeigen wir für dieses Beispiel, daß $y(x) \equiv f(x) = y(0)\, e^{cx}$ die einzige Lösung zu der gegebenen Anfangsbedingung ist.

- <u>Annahme</u>:
  Zum Beweis unserer Behauptung gehen wir von der Annahme ihres Gegenteils aus, nämlich daß es eine zweite, von $f(x)$ verschiedene Lösung $g(x)$ gibt, welche die Differentialgleichung erfüllt, $g'(x) = c \cdot g(x)$, und zwar zu den gleichen Anfangsbedingungen wie für $f(x)$, also $g(0) = f(0)$.

- Nun betrachten wir die Funktion

  $$h(x) = e^{-cx} g(x)\,,$$

  für die $h(0) = g(0)$ ist. Die Ableitung dieser Funktion ist

  $$h'(x) = -ce^{-cx} \cdot g + e^{-cx} \cdot g' = -ce^{-cx} \cdot g + e^{-cx} \cdot cg = 0\,.$$

Das Verschwinden dieser Ableitung bedeutet $h = \text{const}$. Die Funktion $h(x)$ hat für alle x den gleichen Wert, nämlich $h(0) = g(0) = f(0)$.

- Resultat:

$$h(x) = e^{-cx} g(x) = f(0)$$
$$\underline{g(x) = f(0) \cdot e^{cx} = f(x)} \qquad \text{q.e.d.}$$

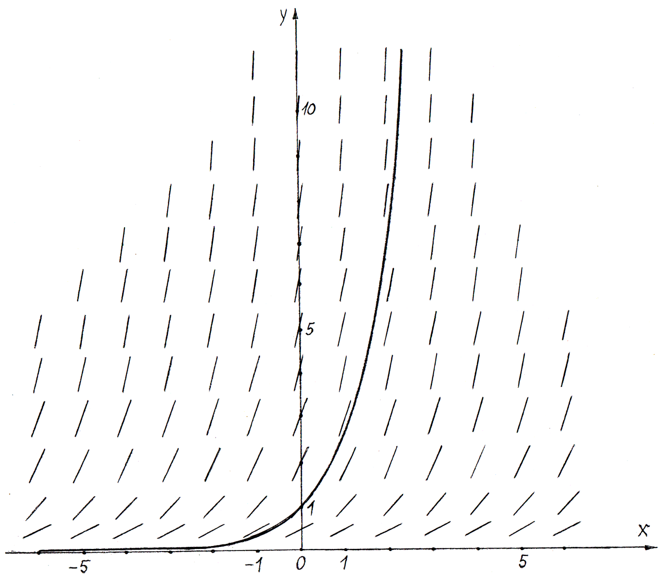
Wir haben gezeigt, daß die angenommene zweite Lösung mit der ersten Lösung identisch ist, so daß $f(x)$ die einzige Lösung der Differentialgleichung zu den gegebenen Anfangsbedingungen ist.

1.3 Geometrische Bedeutung von Differentialgleichungen: Das Richtungsfeld

Die geometrische Bedeutung der ersten Ableitung einer Funktion $y = f(x)$ besteht darin, den Anstieg der Tangente an diese Funktion im Punkt $P(x, y)$ zu beschreiben. Somit gibt eine Differentialgleichung 1. Ordnung an, wie groß je nach der Wahl des Punktes $P(x, y)$ der Anstieg der dortigen lokalen Tangente ist. So entsteht ein ganzes Feld von Tangenten, das *Richtungsfeld*.

Zur Illustration wählen wir das Beispiel (1) unserer Liste mit dem speziellen Wert $c = 1$, also die einfache Differentialgleichung

$$y' = y\,.$$



Die Abbildung zeigt das Richtungsfeld für diese Differentialgleichung. Wir lesen ab, daß der Anstieg der lokalen Tangenten wie y wächst und dabei unabhängig von x, also bei gegebenem y für alle x gleich ist. So beträgt dieser Anstieg beispielsweise für $y = 1$ im Gradmaß 45°, und zwar überall entlang der Abszisse.

Geben wir einen Punkt $P(x, y)$ vor („Anfangswert"), muß die Lösung der Differentialgleichung, geometrisch: die *Integralkurve*, durch diesen Punkt gehen und weiterhin so verlaufen, daß sie in jedem anderen ihrer Punkte die dort durch das Richtungsfeld gegebene Tangente hat. Wir lernen:

Eine Differentialgleichung lösen heißt, eine Integralkurve so durch das Richtungsfeld zu legen, daß sie tangential zu der in jedem Punkt gegebenen Richtung verläuft.

In der Physik ist oft die Zeit t die unabhängige Variable. Das Richtungsfeld stellt dann ein „Geschwindigkeitsfeld", die Lösungskurven „Flußlinien" dar.

2 Separable Differentialgleichungen

Als separable Differentialgleichungen bezeichnet man Differentialgleichungen 1. Ordnung, die sich in der Gestalt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)}$$

aufschreiben lassen, in der die Funktionen g und h von x allein beziehungsweise von y allein abhängen. Ein wichtiger *Spezialfall* ist die lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = 0 \quad \text{mit} \quad g(x) = -P(x) \quad \text{und} \quad h(y) = y\,,$$

die wir später noch behandeln werden. Im allgemeinen sind separable Differentialgleichungen jedoch nichtlinear.

2.1 Lösungsverfahren: Trennung der Variablen

Wir schreiben die zu lösende Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)$$

in der Form

$$\frac{1}{h(y)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x)$$

auf und integrieren beide Seiten bezüglich der Variablen x,

$$\int \frac{1}{h(y)} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\, \mathrm{d}x = \int g(x)\, \mathrm{d}x\,.$$

Auf das Integral der linken Seite wenden wir die Substitutionsregel der Integralrechnung an und kommen zu dem Resultat

$$\underline{\int \frac{1}{h(y)}\, \mathrm{d}y = \int g(x)\, \mathrm{d}x\,.}$$

Dieses Lösungsverfahren bezeichnet man als die *Methode der Trennung der Variablen*. Wir erhalten die Lösung $y = y(x)$ im allgemeinen implizit, wenn die Integrale überhaupt lösbar sind. Zudem ergibt sich *eine* Integrationskonstante, die durch die „Anfangs“-Bedingung zu bestimmen ist.

2.2 Beispiele

1. Wachstum und Zerfall Wir wenden uns noch einmal dem Beispiel (1) unserer Liste zu. Wachstum und Zerfall werden durch die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - c \cdot y = 0$$

beschrieben. Diese ist also von 1. Ordnung, linear und homogen und hat konstante Koeffizienten. Aufgefaßt als separable Differentialgleichung, haben wir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c \cdot y\,, \quad \text{mit} \quad g(x) = c = \text{const}\,, \quad h(y) = y\,,$$

wobei auch die Wahl $g(x) = 1$ und $h(y) = cy$ möglich gewesen wäre. Nun wenden wir das Lösungsverfahren der Trennung der Variablen an.

- 1. Schritt: Trennung der Variablen
$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = c$$
- 2. Schritt: Integration bezüglich der Variablen x
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= c \int \mathrm{d}x \\ \ln|y| + C_1 &= cx + C_2 \\ \ln|y| &= cx + C \quad \text{mit } \textit{einer} \text{ Konstanten } C = C_2 - C_1 \end{aligned}$$
- 3. Schritt: Auflösen nach y
$$\begin{aligned} |y| &= e^{cx+C} \\ y &= Ae^{cx}\,, \quad \text{mit} \quad A = \pm e^C. \end{aligned}$$

2. Orthogonaltrajektorien Wir betrachten exemplarisch die Schar von Parabeln

$$y = kx^2\,, \quad k = \text{const} \gtreqless 0\,.$$

Diese erfüllen wegen

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2kx = 2\frac{y}{x}$$

die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - \frac{2}{x} \cdot y = 0\,.$$

Diese Gleichung ist von 1. Ordnung, linear und homogen, aber der Koeffizient $\dfrac{2}{x}$ ist nicht konstant. Lesen wir sie als separable Differentialgleichung, ist

$$g(x) = \frac{2}{x} \quad \text{und} \quad h(y) = y\,,$$

wobei wir den Faktor 2 auch der Funktion $h(y)$ hätten zuordnen können.

Geometrisch läßt sich die Gleichung interpretieren, indem wir $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ als die Anstiege $m = 2 \cdot \frac{y}{x}$ der lokalen Tangenten an die Scharparabeln auffassen.

Anmerkung: Der Leser ist aufgerufen, diese Differentialgleichung zu lösen, um zu sehen, daß der Scharparameter k die Integrationskonstante ist. Eine Integrationskonstante ist aber Bestandteil der Lösung einer Differentialgleichung, nicht der Differentialgleichung selbst. Daher haben wir sie, ausgehend von der Lösungsschar, durch $\frac{y}{x^2}$ ersetzt.

Auf diesen Tangenten stehen die Tangenten der *Orthogonaltrajektorien* senkrecht, haben also den Anstieg

$$m_\perp = -\frac{1}{m} = -\frac{x}{2y}\,.$$

Damit genügen die Orthogonaltrajektorien der separablen Differentialgleichung

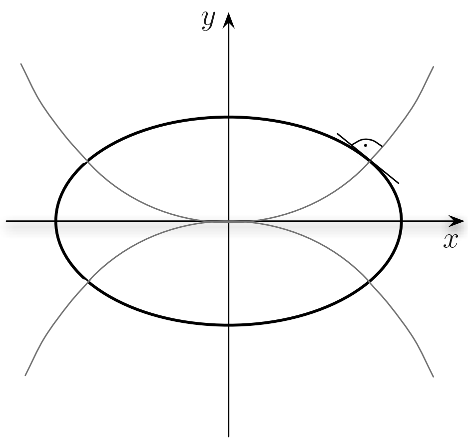
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{2y} \quad \text{mit} \quad g(x) = -\frac{x}{2}\,, \quad h(y) = \frac{1}{y}\,.$$

Aufgeschrieben in der Form

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{2}\cdot\frac{1}{y} = 0\,,$$

erkennen wir, daß diese Gleichung homogen und von 1. Ordnung, jedoch nichtlinear ist.

Wir wenden nun schrittweise das Lösungsverfahren der Trennung der Variablen auf diese Differentialgleichung an.



- 1. Schritt: Trennung der Variablen

$$y\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{x}{2}$$

- 2. Schritt: Integration bezüglich der Variablen x

$$\int y\ \mathrm{d}y = -\frac{1}{2}\int x\ \mathrm{d}x$$

$$\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{4} + C$$

$$y^2 = -\frac{x^2}{2} + c \quad (\text{mit } c \equiv 2C)$$

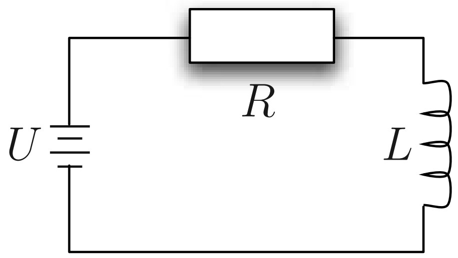
- 3. Schritt: Wir lösen in einem letzten Schritt das bisherige Ergebnis nicht nach der Variablen y auf, sondern schreiben es in der Form

$$\frac{x^2}{2c} + \frac{y^2}{c} = 1\,.$$

Die Orthogonaltrajektorien der Parabelschar bilden eine Schar von geometrisch ähnlichen Ellipsen mit dem Achsenverhältnis $\sqrt{2}:1$.

3. R-L-Schwingkreis Wir betrachten einen elektrischen Schwingkreis, bestehend aus einer Induktivität L und einem Ohmschen Widerstand R. Die Spannung U sei konstant. Dafür ergibt sich aus physikalischen Überlegungen für die Stromstärke I

$$L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+RI=U\,,\quad \text{mit}\quad U=\text{const}\,.$$



Wir erhalten also die Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}I=\frac{U}{L}$$

mit der Zeit t als der unabhängigen Variablen. Diese Differentialgleichung ist von 1. Ordnung, linear, inhomogen und hat konstante Koeffizienten.

Mit konstanter Inhomogenität ist die Differentialgleichung separabel,

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=\frac{U-RI}{L}\quad \text{mit}\quad g(t)=1\,,\quad h(I)=\frac{U-RI}{L}\,,$$

wobei wir den Faktor $\frac{1}{L}$ auch der Funktion $g(t)$ hätten zuordnen können. Die Lösungsschritte sind nun wie folgt:

- 1. Schritt: Trennung der Variablen

$$\frac{L}{U-RI}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x}=1$$

- 2. Schritt: Integration beider Seiten bezüglich der Variablen t

$$L\int\frac{1}{U-RI}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t=L\int\frac{\mathrm{d}I}{U-RI}=\int\mathrm{d}t$$
$$-\frac{L}{R}\ln|U-RI|=t+c\,,\quad c=\text{const}$$

- 3. Schritt: Auflösen nach I

$$|U-RI|=e^{-\frac{R}{L}(t+c)}$$
$$U-RI=Ae^{-\frac{R}{L}t}\quad \text{mit}\quad A=\pm e^{-\frac{R}{L}c}$$
$$I=\frac{U}{R}-\frac{A}{R}e^{-\frac{R}{L}t}$$

- 4. Schritt: Einarbeiten der Anfangsbedingung

$$\text{sei für } t=0:\quad I(0)=\frac{U}{R}-\frac{A}{R}\overset{!}{=}I_0\quad\longrightarrow\quad A=U-RI_0$$

- 5. Schritt: Resultat

$$I(t) = \frac{U}{R} - \left(\frac{U}{R} - I_0\right)\, e^{-\frac{R}{L}t}$$

Dieses Resultat hat die Eigenschaft $I(t) \xrightarrow{t\longrightarrow\infty} \frac{U}{R}$.

Strukturell gleiche Probleme sind die Beispiele (2) und (3) unserer Liste. Damit können wir unsere allgemeine Lösung direkt auf Wachstum und Zerfall mit konstanter Zufuhr übertragen, um das bereits bekannte Ergebnis

$$y = -\frac{d}{c} + \frac{A}{c}\, e^{cx}$$

zu erhalten, worin $\frac{A}{c}$ eine Konstante ist, die wir früher ihrerseits mit A bezeichnet haben.

Für den freien Fall mit Reibung erhalten wir

$$v = \frac{mg}{\gamma} - \frac{A}{\gamma}\, e^{-\frac{\gamma}{m}t}\,.$$

Darin ist $\frac{A}{\gamma}$ *eine* Integrationskonstante.

3 Die lineare, inhomogene Differentialgleichung erster Ordnung

Die inhomogene, lineare Differentialgleichung 1. Ordnung hat die allgemeine Gestalt

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = Q(x)}\,.$$

Darin sind der Koeffizient $P(x)$ und die Inhomogenität $Q(x)$ im allgemeinen nicht konstant.

3.1 Lösungsverfahren: Variation der Konstanten

Bei der Lösung dieser Differentialgleichung gehen wir in mehreren Schritten vor.

1. Schritt: Wir lösen zuerst die zugehörige homogene Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = 0\,,$$

ignorieren also die Inhomogenität $Q(x)$. Diese homogene Differentialgleichung ist separabel. Mit $g(x) = -P(x)$ und $h(y) = y$ ergibt das Verfahren der Trennung der Variablen

$$\begin{aligned} \int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= -\int P(x)\,\mathrm{d}x \\ \ln|y| &= -\int P(x)\,\mathrm{d}x + c\,. \end{aligned}$$

Durch Auflösen nach y erhalten wir die *allgemeine* Lösung der *homogenen* Differentialgleichung

$$y_h = A e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \quad \text{mit} \quad A = \pm e^c\,.$$

2. Schritt: Wir lösen die inhomogene Differentialgleichung durch *Variation der Konstanten*. Der Begriff „Variation der Konstanten“ scheint zunächst ein Widerspruch in sich zu sein. Gemeint ist, die Konstante A der Lösung des homogenen Teils aus Schritt 1 durch eine Funktion $u(x)$ mit dem Ziel zu ersetzen, eine einfache Differentialgleichung für $u(x)$ zu erhalten.

- Variation der Konstanten:

$$y_h = A e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} \quad \longrightarrow \quad \text{Ansatz:} \quad y = u(x) \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}$$

- Einsetzen dieses Ansatzes in die inhomogene Differentialgleichung: Es ist

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} - u(x)P(x) \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,.$$

Damit wird aus der inhomogenen Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x} - P(x)y + P(x)y = Q(x) \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = Q(x) \cdot e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x} \,. \end{aligned}$$

Wir haben also eine sehr einfache Differentialgleichung für $u(x)$ erhalten, deren Lösung

$$u = \int Q(x) \cdot e^{\int^{x} P(x')\,\mathrm{d}x'} \,\mathrm{d}x + C\,, \quad C = \text{const}$$

ist.

3. Schritt: Resultat Mit dieser Funktion $u(x)$ anstelle der Konstanten A ist die *allgemeine* Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung

$$\underline{y = \left[\int Q(x) \cdot e^{\int^{x} P(x')\,\mathrm{d}x'} \,\mathrm{d}x + C \right] e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}}\,.$$

Wir empfehlen aber, sich statt dieser Lösungsformel das Lösungsverfahren einzuprägen und in jedem Anwendungsfall Schritt für Schritt zu praktizieren.

3.2 Diskussion der Lösung

Die erhaltene Lösung enthält eine Integrationskonstante und ist die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Mit der Abkürzung

$$I(x) \equiv \int P(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad \text{sodaß} \quad \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = P(x)$$

nimmt die Lösung die übersichtlichere Gestalt

$$y = \left[\int Q(x) \cdot e^{I(x)} \,\mathrm{d}x \right] e^{-I(x)} + C \cdot e^{-I(x)}$$

an.

Bedeutung des 2. Summanden Der zweite Summand ist die allgemeine Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung (siehe 1. Schritt mit $C = \text{const}$ anstelle von $A = \text{const}$).

Probe:

$$\begin{aligned} y_h &= Ce^{-I(x)} \\ \frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} &= -Ce^{-I(x)} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} = -y_h \cdot P(x) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y_h}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y_h = 0$$

Bedeutung des 1. Summanden Dieser ist für sich genommen eine *spezielle* (Partikulär-) Lösung der *inhomogenen* Differentialgleichung.

Probe:

$$
\begin{aligned}
y_p &= \left[\int Q(x)\, e^{I(x)}\,\mathrm{d}x\right] e^{-I(x)} \\
\frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}x} &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int Q(x)\, e^{I(x)}\,\mathrm{d}x\right] e^{-I(x)} - \left[\int Q(x)\, e^{I(x)}\,\mathrm{d}x\right] e^{-I(x)}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}x} \\
\frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}x} &= \left[Q(x)\, e^{I(x)}\right] e^{-I(x)} - y_p \cdot P(x)
\end{aligned}
$$

$$
\longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}x} + P(x)\cdot y_p = Q(x)
$$

Wir erkennen:

> Wir erhalten die allgemeine Lösung $y(x)$ einer linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung, indem wir zur allgemeinen Lösung y_h der homogenen Differentialgleichung eine Partikulärlösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung addieren,
>
> $$y(x) = y_h(x) + y_p(x)\,.$$

Dabei ist es nicht wichtig, wie wir zu einer Partikulärlösung der inhomogenen Differentialgleichung gelangen, auch „Erraten“ dieser Lösung ist zulässig. Die hier vorgestellte Methode der Variation der Konstanten ist jedoch ein systematisches Verfahren.

3.3 Beispiele

1. R-L-Schwingkreis Wir betrachten nochmals den R-L-Schwingkreis, jedoch nun anstelle von $U = \text{const}$ mit einer Wechselspannung (Beispiel (4) unserer Liste). Mit

$$U \longrightarrow U_0 \sin\omega t$$

gelangen wir zur Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}I = \frac{U_0}{L}\sin\omega t\,.$$

Diese ist von 1. Ordnung, linear, mit einem konstanten Koeffizienten und einer zeitabhängigen Inhomogenität,

$$P(t) = \frac{R}{L} = \text{const} \quad \text{und} \quad Q(t) = \frac{U_0}{L}\sin\omega t\,.$$

Wir lösen diese Differentialgleichung Schritt für Schritt wie folgt.

- 1. Schritt: Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung durch Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\frac{R}{L} I$$
$$\int \frac{\mathrm{d}I}{I} = -\frac{R}{L} \int \mathrm{d}t$$

$$I_h = A e^{-\frac{R}{L} t}\,, \quad A = \text{const}$$

- 2. Schritt: Variation der Konstanten

$$\text{Ansatz:} \qquad I = u(t)\, e^{-\frac{R}{L} t}$$
$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} u(t)\, e^{-\frac{R}{L} t}$$

- 3. Schritt: Einsetzen in die inhomogene Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} e^{-\frac{R}{L} t} - \frac{R}{L} I + \frac{R}{L} I = \frac{U_0}{L} \sin \omega t$$
$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{L} e^{\frac{R}{L} t} \sin \omega t$$

- 4. Schritt: Integration

$$u = \frac{U_0}{L} \frac{e^{\frac{R}{L} t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + c\,, \quad c = \text{const}$$

- 5. Schritt: Resultat
  Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung ist

$$I = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t \right) + c\, e^{-\frac{R}{L} t}\,.$$

- 6. Schritt: Einarbeiten der Anfangsbedingung
  Mit der Anfangsbedingung

$$I(0) = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \cdot (-\omega) + c \overset{!}{=} I_0 \quad \longrightarrow \quad c = I_0 + \frac{U_0}{L} \frac{\omega}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2}$$

  erhalten wir die spezielle Lösung

$$I = \frac{U_0}{L} \frac{1}{\left(\frac{R}{L}\right)^2 + \omega^2} \left(\frac{R}{L} \sin \omega t - \omega \cos \omega t + \omega\, e^{-\frac{R}{L} t} \right) + I_0\, e^{-\frac{R}{L} t}\,.$$

2. Radioaktive Zerfallskette Radium → Radon → Polonium Wir führen folgende Bezeichnungen ein: N sei die Anzahl der jeweiligen Atomkerne, $\lambda > 0$ deren Zerfallskonstante. Im einzelnen ist für Radium (Ra) und Radon (Rn)

$$\begin{aligned} &\text{Ra - Index 1}\,; \quad N_1(0) = N_0\,, \quad \text{Zerfallskonstante } \lambda_1 \\ &\text{Rn - Index 2}\,; \quad N_2(0) = 0\,, \quad \text{Zerfallskonstante } \lambda_2\,. \end{aligned}$$

Es sollen also zur Anfangszeit $t_0 = 0$ ausschließlich Radium-Kerne vorliegen. Deren Zerfall wird durch

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} = -\lambda_1 N_1 < 0 \quad \longrightarrow \quad N_1 = N_0\, e^{-\lambda_1 t}$$

beschrieben (Beispiel (1) der Liste der Differentialgleichungen). Das aus dem Radium entstehende Radon zerfällt seinerseits, wobei es eine zeitabhängige Zufuhr in dem Maße gibt, wie das Radium zerfällt $\left(-\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} > 0\right)$. Zusammen gelangen wir zu der Zerfallsgleichung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 \\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} + \lambda_2 N_2 &= \lambda_1 N_0\, e^{-\lambda_1 t} \end{aligned}$$

für das Radon. Das ist wiederum eine lineare, Differentialgleichung 1. Ordnung mit dem konstanten Koeffizienten $P(t) = \lambda_2 = \text{const}$ und der zeitabhängigen Inhomogenität

$$Q(t) = \lambda_1 N_0\, e^{-\lambda_1 t}\,.$$

Die Lösungsschritte sind:

- 1. Schritt: Lösung der homogenen Gleichung durch Trennung der Variablen

$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} = -\lambda_2 N_2 \quad \longrightarrow \quad N_2(t) = A\, e^{-\lambda_2 t}\,, \quad A = \text{const}$$

- 2. Schritt: Variation der Konstanten

$$\text{Ansatz:} \quad N_2(t) = u(t)\, e^{-\lambda_2 t}$$

- 3. Schritt: Einsetzen in die inhomogene Gleichung

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\, e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 u(t)\, e^{-\lambda_2 t} \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\, e^{-\lambda_2 t} - \lambda_2 u\, e^{-\lambda_2 t} + \lambda_2 u\, e^{-\lambda_2 t} &= \lambda_1 N_0\, e^{-\lambda_1 t} \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} &= \lambda_1 N_0\, e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \end{aligned}$$

- 4. Schritt: Integration

$$u(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\, e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C\,, \quad C = \text{const}$$

- 5. Schritt: Resultat
  Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist

$$N_2(t) = u(t)\, e^{-\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\, e^{-\lambda_1 t} + C\, e^{-\lambda_2 t} \,.$$

- 6. Schritt: Einarbeiten der Anfangsbedingung
  Mit der Anfangsbedingung

$$N_2(0) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} + C \overset{!}{=} 0 \quad \longrightarrow \quad C = -\frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

  erhalten wir die zu dieser Anfangsbedingung passende spezielle Lösung

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t} \right) \,.$$

Anmerkung: Es ist instruktiv, ausgehend von dieser Lösung den Spezialfall $\lambda_1 = \lambda_2$ zu behandeln, wenngleich dies auf den Zerfall von Radium und Radon nicht zutrifft. Wir schreiben $\lambda_2 = \lambda_1 + \Delta\lambda$, sodaß

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1 N_0}{\Delta\lambda}\, e^{-\lambda_1 t} \left[1 - e^{-\Delta\lambda \cdot t} \right] \,.$$

Durch Reihenentwicklung von $e^{-\Delta\lambda \cdot t}$ finden wir weiter

$$\begin{aligned} N_2(t) &= \frac{\lambda_1 N_0}{\Delta\lambda}\, e^{-\lambda_1 t} \left[1 - \left(1 - \Delta\lambda \cdot t + \frac{1}{2} (\Delta\lambda)^2 \cdot t^2 - \dots \right) \right] \\ &= \lambda_1 N_0\, e^{-\lambda_1 t} \left[t - \frac{1}{2} (\Delta\lambda) \cdot t^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

mit dem Ergebnis

$$N_2(t) \xrightarrow{\Delta\lambda \to 0} \lambda_1 N_0 \cdot t\, e^{-\lambda_1 t} \,.$$

4 Exakte und nicht exakte Differentialgleichungen

Bisher haben wir separable Differentialgleichungen behandelt. Diese sind im allgemeinen nichtlinear. Zudem haben wir gesehen, wie man allgemeine lineare, inhomogene Differentialgleichungen 1. Ordnung löst. Davon war der homogene Teil separabel, und die inhomogene Gleichung wurde anschließend durch Variation der Konstanten gelöst. Das Beispiel

$$\left(x^2 \cos y - x^2 y \sin y\right) \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2xy \cos y + x^2 = 0$$

ist mit dieser Methode jedoch nicht behandelbar. Schreiben wir diese Gleichung im wörtlichen Sinne als Gleichung mit Differentialen,

$$\left(2xy \cos y + x^2\right) \, \mathrm{d}x + \left(x^2 \cos y - x^2 y \sin y\right) \, \mathrm{d}y = 0\,,$$

ist sie ein Spezialfall der allgemeinen Form

$$\boxed{A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y = 0}\,.$$

4.1 Exakte Differentialgleichungen

Wir vergleichen diese allgemeine Form mit dem vollständigen Differential

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial U}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

einer Funktion $U(x,y)$. Wie wir aus der Differentialrechnung mit Funktionen, die von mehreren Variablen abhängen wissen, ist nicht jedes Differential $[A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y]$ vollständig. Ein Vergleich mit dem vollständigen Differential $\mathrm{d}U$ ergibt, daß eine Funktion $U(x,y)$ existieren muß, sodaß

$$A = \frac{\partial U}{\partial x} \quad \text{und} \quad B = \frac{\partial U}{\partial y}$$

ist. Das Kriterium dafür, daß eine solche Funktion $U(x,y)$ existiert, ist die auf der Vertauschbarkeit der zweiten partiellen Ableitungen beruhende *Integrabilitätsbedingung*

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}}\,.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, nimmt die Differentialgleichung $A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ die Gestalt

$$\boxed{\mathrm{d}U(x,y) = 0}$$

an und hat die (i.A. implizite) Lösung

$$\underline{U(x,y) = \mathrm{const}}\,.$$

Solche Differentialgleichungen heißen *exakt*.

1. Beispiel Wir behandeln nun das Beispiel aus der Einleitung zu diesem Abschnitt. Es ist

$$A(x,y) = 2xy\cos y + x^2\,, \quad \text{mit} \quad \frac{\partial A}{\partial y} = 2x\cos y - 2xy\sin y$$

und

$$B(x,y) = x^2\cos y - x^2 y\sin y\,, \quad \text{mit} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 2x\cos y - 2xy\sin y\,.$$

Wir erkennen, daß die Integrabilitätsbedingung erfüllt und somit die Differentialgleichung exakt ist. Es existiert also eine Funktion $U(x,y)$, die nun zu bestimmen ist.

- 1. Schritt: $\quad A(x,y) = \dfrac{\partial U}{\partial x} = 2xy\cos y + x^2$

  Die Integration ergibt

  $$U(x,y) = x^2 y\cos y + \frac{x^3}{3} + g(y)\,,$$

  wobei bei der x-Integration y wie eine Konstante zu behandeln ist, sodaß die Integrations-Konstante im allgemeinen eine Funktion von $g(y)$ ist.

- 2. Schritt: Aus der im 1. Schritt erhaltenen Lösung folgt

  $$\frac{\partial U}{\partial y} = x^2\cos y - x^2 y\sin y + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\,.$$

- 3. Schritt: Es ist unabhängig davon auch $B(x,y) = \dfrac{\partial U}{\partial y} = x^2\cos y - x^2 y\sin y$.

  Gleichsetzen beider Ausdrücke für $\frac{\partial U}{\partial y}$,

  $$x^2\cos y - x^2 y\sin y + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = x^2\cos y - x^2 y\sin y\,,$$

  führt uns auf die in diesem Fall besonders einfache Differentialgleichung

  $$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = 0 \qquad \text{mit der Lösung} \quad g(y) = c = \text{const}\,.$$

- 4. Schritt: Mit dieser Lösung für $g(y)$ erhalten wir

  $$U(x,y) = x^2 y\cos y + \frac{x^3}{3} + c$$

  und somit die implizite Lösung $U(x,y) = \text{const}$ der ursprünglichen Differentialgleichung, nämlich

  $$x^2 y\cos y + \frac{x^3}{3} = C\,.$$

  Dabei ist in der Konstanten C die Konstante c enthalten.

Anmerkung: Wir hätten im 1. Lösungsschritt auch mit $B(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$ beginnen können. Dann hätte die y-Integration auf die Integrations-Konstante $f(x)$ geführt usw.

2. Beispiel Separable Differentialgleichungen $\dfrac{dy}{dx} = g(x) \cdot h(y)$
Wir schreiben die Differentialgleichung in der Form

$$g(x)\,dx - \frac{1}{h(y)}\,dy = 0$$

auf, sodaß

$$A(x,y) = g(x) \quad \text{und} \quad B(x,y) = -\frac{1}{h(y)}$$

ist. Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt, denn es ist

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 0 = \frac{\partial B}{\partial x}\,.$$

$$\boxed{\text{Alle separablen Differentialgleichungen sind exakt.}}$$

- Lösungsweg: Wir beginnen mit

$$\frac{\partial U}{\partial x} = g(x) \quad \longrightarrow \quad U(x,y) = \int g(x)\,dx + f(y)\,,$$

worin $f(y)$ die Integrationskonstante ist. Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{df}{dy}\,.$$

Andererseits ist auch

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{1}{h(y)}\,.$$

Das ergibt zusammen

$$\frac{df}{dy} = -\frac{1}{h(y)} \quad \longrightarrow \quad f(y) = -\int \frac{dy}{h(y)}$$

und damit

$$U(x,y) = \int g(x)\,dx - \int \frac{dy}{h(y)}\,.$$

Die Lösung einer separablen Differentialgleichung ist somit

$$\int g(x)\,dx - \int \frac{dy}{h(y)} = C = \text{const}\,,$$

was auch als

$$\int g(x)\,dx = \int \frac{dy}{h(y)}$$

geschrieben werden kann (vergleiche Abschnitt 2), da die unbestimmten Integrale Integrationskonstanten enthalten.

4.2 Nicht exakte Differentialgleichungen: Der integrierende Faktor

Wir betrachten nun als neues Beispiel die Differentialgleichung

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - xy^2 - y = 0 \quad \text{oder} \quad (xy^2 + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Für diese Differentialgleichung ist $A(x,y) = xy^2 + y$ und $B(x,y) = -x$, sodaß

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2xy + 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = -1\,.$$

Die Integrabitlitätsbedingung ist hier nicht erfüllt, die Differentialgleichung nennt man daher *nicht exakt*.
Jede Differentialgleichung der Form $A(x,y)\,\mathrm{d}x + B(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$ kann aber exakt gemacht werden. Dazu führen wir den *integrierenden Faktor* $\lambda(x,y)$ ein, mit dem wir die Differentialgleichung multiplizieren,

$$(\lambda A)\,\mathrm{d}x + (\lambda B)\,\mathrm{d}y = 0\,.$$

Die Idee ist nun, λ so zu bestimmen, daß die Integrabilitätsbedingung erfüllt wird. Wir fordern also

$$\frac{\partial}{\partial y}(\lambda A) \overset{!}{=} \frac{\partial}{\partial x}(\lambda B)\,.$$

Das führt explizit auf die partielle Differentialgleichung

$$\boxed{A\frac{\partial \lambda}{\partial y} - B\frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda\left(\frac{\partial A}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial x}\right) = 0}$$

für $\lambda(x,y)$, die im allgemeinen schwer zu lösen ist. Jedoch suchen wir nicht nach der allgemeinen Lösung dieser Gleichung, sondern nach irgendeinem λ, das diese Gleichung erfüllt. In vielen Fällen ergibt sich so eine Vereinfachung, und die Gleichung für λ ist lösbar. Mit einiger Erfahrung kann man λ in manchen Fällen auch „erraten“.

1. Beispiel Wieder behandeln wir das in diesen Abschnitt einführende Beispiel.
Die Bestimmungsgleichung für λ ist

$$y(xy+1)\frac{\partial \lambda}{\partial y} + x\frac{\partial \lambda}{\partial x} + 2\lambda(xy+1) = 0\,.$$

Es läßt sich eine wesentliche Vereinfachung erreichen, wenn λ nur von y allein abhängt, $\lambda = \lambda(y)$. Dann bleibt anstelle der partiellen Differentialgleichung die gewöhnliche Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}y} + 2\lambda = 0$$

übrig, die durch Trennung der Variablen lösbar ist. Danach haben wir

$$\int \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = -2\int \frac{\mathrm{d}y}{y}$$

zu berechnen, und die Integration ergibt

$$\ln\lambda = -2\ln y + c\,.$$

Somit ist der integrierende Faktor
$$\lambda = \frac{1}{y^2}\,,$$
wobei auch die Integrationskonstante entfallen kann, da wir nur eine spezielle Lösung suchen. Die Differentialgleichung wird nach Multiplikation mit diesem λ zu
$$\left(x + \frac{1}{y}\right) \mathrm{d}x - \frac{x}{y^2}\,\mathrm{d}y = 0\,,$$
wobei jetzt die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist:
$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x + \frac{1}{y}\right) = -\frac{1}{y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{y^2}\right)\,.$$

Lösung:

- 1. Schritt:
$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + \frac{1}{y} \quad\longrightarrow\quad U = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + g(y)$$
- 2. Schritt: Daraus folgt
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y}\,.$$
- 3. Schritt: Andererseits gilt auch
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}\,.$$
  Das ergibt zusammen
$$-\frac{x}{y^2} + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = -\frac{x}{y^2} \quad\longrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} = 0 \quad\longrightarrow\quad g = c = \mathrm{const}\,.$$
- 4. Schritt:
$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + c$$
  Die Lösung $U(x,y) = \mathrm{const}$ der Differentialgleichung ist zunächst implizit
$$\frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} = C$$
  und schließlich
$$y = \frac{2x}{2C - x^2}\,.$$

Wir machen nun noch die Probe mit der *ursprünglichen* Differentialgleichung. Indem wir die Lösung implizit differenzieren,
$$\begin{aligned} x + \frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}y' &= 0 \quad \Big|\, y^2 \\ xy^2 + y - xy' &= 0, \end{aligned}$$
sehen wir, daß die anfängliche Differentialgleichung $xy' - xy^2 - y = 0$ erfüllt ist.

Anmerkung Wir hätten auch mit $\frac{\partial U}{\partial y}$ beginnen können, was wir hier ausnahmsweise explizit vorführen wollen.

- 1. Schritt:
$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{x}{y^2} \quad \longrightarrow \quad U = \frac{x}{y} + f(x)$$
- 2. Schritt: Daraus folgt
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{1}{y} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,.$$
- 3. Schritt: Andererseits gilt auch
$$\frac{\partial U}{\partial x} = x + \frac{1}{y}\,.$$
Das ergibt zusammen
$$\frac{1}{y} + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = x + \frac{1}{y} \quad \longrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = x \quad \longrightarrow \quad f(x) = \frac{x^2}{2} + c\,.$$
- 4. Schritt:
$$U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \frac{x}{y} + c$$

2. Beispiel Die lineare, inhomogene Differentialgleichung $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)\cdot y = Q(x)$

Wir schreiben diese Gleichung in der Form

$$[P(x)\cdot y - Q(x)]\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0 \quad \text{mit} \quad A(x,y) = P(x)\cdot y - Q(x) \quad \text{und} \quad B(x,y) = 1\,.$$

Da

$$\frac{\partial A}{\partial y} = P(x)\,, \quad \text{aber} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0$$

ist, ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt; die Differentialgleichung ist nicht exakt. Wir suchen also einen integrierenden Faktor und beginnen mit der Bestimmungsgleichung

$$[P(x)\cdot y - Q(x)]\,\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \lambda \cdot P(x) = 0$$

für λ. Wir erkennen, daß sich mit einem Faktor $\lambda = \lambda(x)$ diese Differentialgleichung zu der gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \lambda \cdot P(x)$$

vereinfachen läßt. Die Trennung der Variablen,

$$\int \frac{\mathrm{d}\lambda}{\lambda} = \int P(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ergibt nach Integration den integrierenden Faktor

$$\underline{\lambda = e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}}\,.$$

Lösung:

- 1. Schritt: Mit $B = 1$ ist
$$\frac{\partial U}{\partial y} = \lambda(x) \cdot B = \lambda(x) \quad \longrightarrow \quad U = \lambda(x) \cdot y + f(x)\,.$$
- 2. Schritt: Daraus folgt mit $\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} = \lambda \cdot P(x)$
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}x} \cdot y + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = \lambda \cdot P(x) \cdot y + \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$
- 3. Schritt: Andererseits ist auch
$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lambda A \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = \lambda \cdot P(x) \cdot y - \lambda \cdot Q(x)\,.$$
Zusammen ergibt sich
$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -\lambda \cdot Q(x)\,,$$
also
$$f(x) = -\int \lambda(x) \cdot Q(x)\,\mathrm{d}x\,.$$
- 4. Schritt: Mit $U = \lambda \cdot y + f = C$ gelangen wir zu der Lösung
$$\underline{y = \frac{1}{\lambda}(-f + C) = e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\left[C + \int Q(x) \cdot e^{\int^{x} P(x')\,\mathrm{d}x'}\,\mathrm{d}x\right]}$$
unserer linearen, inhomogenen Differentialgleichung 1. Ordnung (vergleiche Abschnitt 3).

3. Beispiel Wir kommen noch einmal auf die separablen Differentialgleichungen
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = g(x) \cdot h(y)$$
zurück. Wie wir bereits wissen, sind diese, aufgeschrieben in der Form
$$g(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = 0$$
exakt. Geschrieben in Differentialen, wäre auch die Form
$$g(x) \cdot h(y)\,\mathrm{d}x - \mathrm{d}y = 0$$
möglich. Dann ist
$$A(x,y) = g(x) \cdot h(y) \quad \text{und} \quad B(x,y) = -1$$
mit den Ableitungen
$$\frac{\partial A}{\partial y} = g(x)\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}y} \quad \text{und} \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 0\,.$$
Die Integrabilitätsbedingung ist also nicht erfüllt. Beim Vergleich der beiden Formen erkennen wir jedoch, daß
$$\lambda(y) = \frac{1}{h(y)}$$
ein integrierender Faktor für die nicht exakte Form dieses Differentialgleichungs-Typs ist. Das ergibt sich selbstverständlich auch aus der Bestimmungsgleichung für $\lambda = \lambda(y)$.

5 Die lineare, homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Die lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat die allgemeine Form

$$\boxed{a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=0}\,.$$

Sie ist also linear, von 2. Ordnung mit $a, b, c = \text{const}\,, \quad (a \neq 0)$ und homogen, da auf der rechten Seite Null steht. Stünde dort eine Funktion $f(x)$, wäre die Differentialgleichung inhomogen.

5.1 Das Lösungsverfahren

Der Exponentialansatz Wir machen den *Exponentialansatz* [1]

$$y = e^{\lambda x}\,, \quad \lambda = \text{const}\,.$$

Dieser verwandelt die Differentialgleichung 2. Ordnung in eine algebraische Gleichung 2. Grades, also in eine quadratische Gleichung. Mit $y' = \lambda e^{\lambda x}$ und $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$ wird

$$\left(a\lambda^2 + b\lambda + c\right)e^{\lambda x} = 0\,,$$

und es resultiert die *charakteristische Gleichung* (das charakteristische Polynom)

$$\boxed{\lambda^2 + \frac{b}{a}\lambda + \frac{c}{a} = 0}\,.$$

Die Lösungen dieser quadratischen Gleichung sind

$$\lambda_{1,2} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2a}\sqrt{b^2-4ac}\,,$$

sodaß wir für unsere ursprüngliche Differentialgleichung zwei Lösungen

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

erhalten.

Die allgemeine Lösung ist eine Linearkombination dieser beiden Lösungen, sodaß sie schließlich auch zwei Integrationskonstanten enthält. Sie hat die Gestalt

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1\,e^{\lambda_1 x} + c_2\,e^{\lambda_2 x}\,.$$

[1] Das Symbol λ wird hier in einem anderen Zusammenhang verwendet als im vorangehenden Abschnitt.

Probe:

$$
\begin{aligned}
&a(c_1y_1'' + c_2y_2'') + b(c_1y_1' + c_2y_2') + c(c_1y_1 + c_2y_2) \\
=&c_1(\underbrace{ay_1'' + by_1' + cy_1}_{=0}) + c_2(\underbrace{ay_2'' + by_2' + cy_2}_{=0}) = 0
\end{aligned}
$$

Also:

$$\boxed{\text{Jede Linearkombination zweier Lösungen ist wieder eine Lösung.}}$$

Die Wronski-Determinante Wir zeigen nun, daß die Linearkombination $y = c_1y_1 + c_2y_2$ die allgemeine Lösung ist. Es muß also möglich sein, die Konstanten c_1 und c_2 für beliebige Anfangsbedingungen zu bestimmen. Wir berechnen die Konstanten, wenn $y(x_0)$ und $y'(x_0)$ gegeben sind, lösen also das algebraische Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
y(x_0) &= c_1y_1(x_0) + c_2y_2(x_0) \\
y'(x_0) &= c_1y_1'(x_0) + c_2y_2'(x_0)
\end{aligned}
\left|\begin{array}{c} y_2'(x_0) \\ y_2(x_0) \end{array}\right| -
$$

mit den beiden Unbekannten c_1 und c_2. Resultat ist für c_1

$$c_1 = \frac{y(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y'(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)}$$

und analog für c_2

$$c_2 = -\frac{y(x_0)y_1'(x_0) - y_1(x_0)y'(x_0)}{y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)}\,.$$

Die Konstanten c_1 und $c_2$sind auf diese Weise aber nur bestimmbar, wenn der in beiden Fällen gleiche Nenner für beliebige x_0 von Null verschieden ist. Der Nenner

$$W(y_1, y_2; x_0) = y_1(x_0)y_2'(x_0) - y_2(x_0)y_1'(x_0)$$

wird als *Wronski-Determinante* [2] bezeichnet. Wenn die Wronski-Determinante zweier Lösungen y_1 und y_2 für beliebige x_0 von Null verschieden ist ($W(y_1, y_2; x_0) \neq 0$), bilden diese Lösungen ein *Fundamentalsystem*, und ihre Linearkombination ist die allgemeine Lösung, weil c_1 und c_2 für beliebige x_0 bestimmbar sind.

Anmerkung 1: Für den Exponentialansatz mit

$$y_1 = e^{\lambda_1 x} \quad \text{und} \quad y_2 = e^{\lambda_2 x}$$

ergibt sich die Wronski-Determinante zu

$$W(y_1, y_2; x) = (\lambda_2 - \lambda_1)\, e^{(\lambda_1+\lambda_2)x}\,.$$

[2] Der Begriff „Determinante“ muß hier nicht näher erläutert werden.

Anmerkung 2: Die Wronski-Determinante erfüllt selbst eine einfache Differentialgleichung. Unter Verwendung der Ausgangs-Differentialgleichung, deren Lösungen y_1 und y_2 sind, erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} &= y_1' y_2' + y_1 y_2'' - y_2' y_1' - y_2 y_1'' \\ &= y_1 \left(-\frac{b}{a} y_2' - \frac{c}{a} y_2 \right) - y_2 \left(-\frac{b}{a} y_1' - \frac{c}{a} y_1 \right) \\ &= -\frac{b}{a} \left(y_1 y_2' - y_2 y_1' \right) ,\end{aligned}$$

also schließlich

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}x} = -\frac{b}{a} W .$$

Das Verhalten der Lösung der quadratischen Gleichung ist abhängig von der Diskriminante $(b^2 - 4ac)$. Im allgemeinen ergeben sich zwei voneinander verschiedene (komplexe) Lösungen λ_1 und λ_2 der charakteristischen Gleichung. Dann ist $W(y_1, y_2; x) \neq 0$ für alle x.

Das Problem der Doppelwurzel: Variation der Konstanten Für $b^2 - 4ac = 0$ ist

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{b}{2a} .$$

In diesem Fall haben wir

$$y = c\, e^{\lambda_1 x} ,$$

was jedoch nicht die allgemeine Lösung sein kann, da nur eine Konstante darin vorkommt. Die zweite Lösung für das Fundamentalsystem gewinnen wir durch *Variation der Konstanten*, indem wir also die Konstante c durch eine unbekannte Funktion $u(x)$ ersetzen:

$$\begin{aligned} y &= u(x)\, e^{\lambda_1 x} \\ y' &= u\lambda_1\, e^{\lambda_1 x} + u'\, e^{\lambda_1 x} \\ y'' &= u\lambda_1^2\, e^{\lambda_1 x} + 2u'\lambda_1\, e^{\lambda_1 x} + u''\, e^{\lambda_1 x} .\end{aligned}$$

Setzen wir diese Zwischenresultate nun in die Differentialgleichung ein,

$$a\left(u\lambda_1^2 + 2u'\lambda_1 + u''\right) e^{\lambda_1 x} + b\left(u\lambda_1 + u'\right) e^{\lambda_1 x} + cu\, e^{\lambda_1 x} = 0 ,$$

und ordnen die Terme nach den Ableitungen von u,

$$a \cdot u'' + (2a\lambda_1 + b) \cdot u' + (a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c) \cdot u = 0 ,$$

verschwinden die Faktoren von u' wegen $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ und von u wegen der charakteristischen Gleichung. Es bleibt

$$a \cdot u'' = 0$$

mit der Lösung

$$u = c_1 + c_2 x \quad \text{und} \quad y = (c_1 + c_2 x)\, e^{\lambda_1 x} .$$

Die Fundamentallösungen sind $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2 = x\, e^{\lambda_2 x}$ mit der für alle x nicht verschwindenden Wronski-Determinante $W(y_1, y_2; x) = e^{2\lambda_1 x}$.

Die allgemeine Lösung im Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ ist also

$$\underline{y = (c_1 + c_2 x)\, e^{\lambda_1 x}} ,$$

worin nun zwei Integrationskonstanten vorkommen.

5.2 Zur Begründung des Exponentialansatzes

Wir können die Differentialgleichung

$$a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=0$$

auch in der Form

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_2\right)y=0}$$

schreiben, also

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\lambda_2 y\right)=\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-(\lambda_1+\lambda_2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\lambda_1\lambda_2 y=0\,.$$

Ein Vergleich zeigt

$$\lambda_1+\lambda_2=-\frac{b}{a}\quad\text{und}\quad\lambda_1\lambda_2=\frac{c}{a}\,.$$

Allgemein haben die Lösungen einer quadratischen Gleichung aber genau diese Eigenschaften (Vietascher Wurzelsatz[3]).

Solange $a,b,c=\text{const}$ ist, dürfen wir die Reihenfolge der Differentialoperatoren $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\right)$ und $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_2 y\right)$ vertauschen, sodaß auch

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_2\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\right)y=0$$

die gleiche Differentialgleichung ist. So gelangen wir von einer Differentialgleichung 2. Ordnung zu zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung, nämlich

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\right)y=0\quad\text{und}\quad\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_2\right)y=0\,,$$

deren Lösungen

$$y=e^{\lambda_1 x}\quad\text{und}\quad y=e^{\lambda_2 x}$$

durch Trennung der Variablen gefunden werden können und unser Fundamentalsystem bilden.

5.3 Beispiele

1. Beispiel Wir lösen die Differentialgleichung

$$2y''-3y'+y=0$$

mit den Anfangsbedingungen

$$y(0)=1\quad\text{und}\quad y'(0)=0$$

in folgenden Schritten:

[3]François Viète bzw. lateinisiert Franciscus Viëta (1540 – 1603): fanzösischer Advokat und Mathematiker

- <u>1. Schritt</u>: Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 - \frac{3}{2}\lambda + \frac{1}{2} = 0$$

mit den Lösungen $\lambda_1 = 1$ und $\lambda_2 = \frac{1}{2}$

  - Fundamentalsystem: $y_1 = e^x$ und $y_2 = e^{x/2}$
  - Wronski-Determinante: $W(y_1, y_2; x) = -\frac{1}{2}\, e^{3x/2} \neq 0$

- <u>2. Schritt</u>: Allgemeine Lösung

$$y = c_1\, e^x + c_2\, e^{x/2}$$

- <u>3. Schritt</u>: Einarbeiten der Anfangsbedingungen
Es ist

$$y(0) = c_1 + c_2 \stackrel{!}{=} 1$$

und

$$y' = c_1\, e^x + \frac{1}{2} c_2\, e^{x/2} \quad \longrightarrow \quad y'(0) = c_1 + \frac{1}{2} c_2 \stackrel{!}{=} 0\,.$$

Dieses algebraische Gleichungssystem für die beiden Unbekannten c_1 und c_2 hat die Lösungen $c_1 = -1$ und $c_2 = 2$.

- <u>4. Schritt</u>: Spezielle Lösung

$$y = 2\, e^{x/2} - e^x$$

2. Beispiel Wir suchen die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'' + 2y' + 2y = 0\,.$$

- <u>1. Schritt</u>: Charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$$

mit den konjugiert-komplexen Lösungen $\lambda_1 = -1 + i$ und $\lambda_2 = -1 - i$.
(Anmerkung: Allgemein gilt für komplexe Lösungen $\lambda_2 = \lambda_1^*$.)

  - Fundamentalsystem: $y_1 = e^{(-1+i)x}$ und $y_2 = e^{(-1-i)x}$
  - Wronski-Determinante: $W(y_1, y_2; x) = -2i\, e^{-2x}$

- <u>2. Schritt</u>: Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned}
y &= c_1\, e^{(-1+i)x} + c_2\, e^{(-1-i)x} \\
&= e^{-x}\left(c_1\, e^{ix} + c_2\, e^{-ix}\right) \\
&= e^{-x}\left(c_1 \cos x + i c_1 \sin x + c_2 \cos x - i c_2 \sin x\right), \quad \text{Eulersche Formel} \\
&= e^{-x}\left[(c_1 + c_2)\cos x + i(c_1 - c_2)\sin x\right] \\
y &= e^{-x}\left(A\cos x + B\sin x\right) \quad \text{mit} \quad A = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad B = i(c_1 - c_2)
\end{aligned}$$

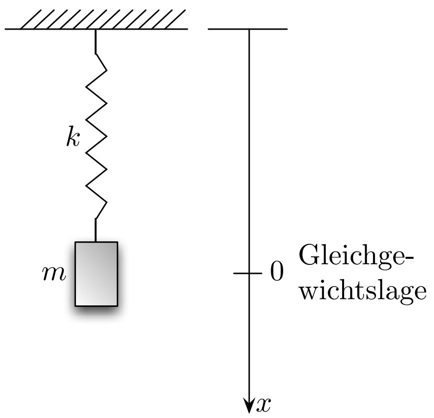
Darin sind A und B reelle und $c_2 = c_1^*$ komplexe Konstanten.

6 Die freie, ungedämpfte Schwingung

Das Newtonsche Kraftgesetz für die eindimensionale Bewegung,

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = F(x),$$

ist bei vorgegebener Kraft F eine Differentialgleichung 2. Ordnung für die unbekannte Funktion $x = f(t)$.



Ein wichtiges Beispiel ist das Hookesche Gesetz

$$F = -kx \quad \text{mit} \quad k = \text{const} > 0\,.$$

Darin ist k die Federkonstante. Die Kraft F ist rücktreibend, also $F < 0$ für $x > 0$ und umgekehrt. Wir gelangen so zu der Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -kx$$

und mit der Abkürzung

$$\omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$$

schließlich zu

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0}\,.$$

Das ist die Differentialgleichung für die freie, ungedämpfte Schwingung (siehe Beispiel 5 auf unserer Liste von Differentialgleichungen). Es ist eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit den konstanten Koeffizienten $a = 1$, $b = 0$ und $c = \omega_0^2$.

In Worten ausgedrückt, besagt diese Gleichung: Gesucht wird eine Funktion $x(t)$, die sich bei zweimaliger Ableitung bis auf einen konstanten Faktor reproduziert. Aus dem Katalog der uns bekannten elementaren Funktionen kommen dafür $x = A\cos\omega_0 t$, aber auch $x = B\sin\omega_0 t$ in Frage, woraus die allgemeine Lösung linear zu kombinieren wäre. Auch die Exponentialfunktion ist ein Kandidat, wie wir von dem Exponentialansatz her bereits wissen, den wir nun anwenden werden.

6.1 Systematische Konstruktion der Lösung

- 1. Schritt: Aus dem Exponentialansatz folgt die charakteristische Gleichung

$$\lambda^2 + \omega_0^2 = 0$$

mit den beiden rein imaginären, konjugiert-komplexen Lösungen

$$\lambda_1 = i\omega_0 \quad \text{und} \quad \lambda_2 = -i\omega_0 \,.$$

– Fundamentallösungen:

$$x_1(t) = e^{i\omega_0 t} \quad \text{und} \quad x_2(t) = e^{-i\omega_0 t}$$

– Wronski-Determinante:

$$W(x_1, x_2; t) = -2i\omega_0$$

- 2. Schritt: Allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x &= c_1\, e^{i\omega_0 t} + c_2\, e^{-i\omega_0 t} \\ &= (c_1 + c_2)\cos\omega_0 t + i(c_1 - c_2)\sin\omega_0 t \\ x &= A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \end{aligned}$$

Da x die (reelle) Auslenkung des Federschwingers bedeutet, sind die Konstanten c_1 und c_2 komplex, A und B jedoch reell. Es besteht der Zusammenhang $A = c_1 + c_2$ und $B = i(c_1 - c_2)$.

Zur Bedeutung der Konstanten A und B Um die Bedeutung der Konstanten A und B zu verstehen, leiten wir das Ergebnis

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t$$

einmal ab,

$$\dot{x} = -A\omega_0 \sin\omega_0 t + B\omega_0 \cos\omega_0 t \,,$$

und drücken die Konstanten A und B durch die Anfangsbedingungen aus. Es seien $x(0) = A \equiv x_0$ die Anfangslage und $\dot{x}(0) = B\omega_0 \equiv v_0$ die Anfangsgeschwindigkeit. Damit können wir die allgemeine Lösung unserer Differentialgleichung auch in der Form

$$x(t) = x_0 \cos\omega_0 t + \frac{v_0}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

aufschreiben.

6.2 Beweis der Eindeutigkeit der Lösung: Die „Methode Energiesatz“

Wir wollen nun zeigen, daß diese Lösung die einzige Lösung zu bestimmten Anfangsbedingungen ist.

- 1. Schritt: Wir nehmen an, daß es neben $f(t)$ noch eine andere Lösung $g(t)$ gibt, welche die Differentialgleichung

$$\ddot{g}(t) + \omega_0^2\, g(t) = 0$$

erfüllt, und zwar zu den gleichen Anfangsbedingungen wie für $f(t)$,

$$g(0) = f(0) \quad \text{und} \quad \dot{g}(0) = \dot{f}(0) \,.$$

- 2.Schritt: Für jede Lösung $h(t)$ unserer Differentialgleichung ist

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{h}^2 + \omega_0^2 h^2\right) = \text{const}\,,$$

denn falls die Differentialgleichung erfüllt ist, gilt

$$\dot{E} = \frac{m}{2}\left(2\dot{h}\ddot{h} + 2\omega_0^2 h\dot{h}\right) = m\dot{h}\underbrace{\left(\ddot{h} + \omega_0^2 h\right)}_{=0} = 0\,.$$

(Den Faktor $\frac{m}{2}$ haben wir nur angefügt, damit die Größe E als Summe aus kinetischer und potentieller Energie erkennbar ist.)

- 3. Schritt: Ist speziell $h(t) = f(t) - g(t)$, gilt $h(0) = 0$ und $\dot{h}(0) = 0$. Damit ist aber auch $E = \text{const} = 0$, d.h. für alle t gilt, da $E = \text{const}$,

$$\dot{h}^2 + \omega_0^2 h^2 = 0\,.$$

Diese Gleichung besagt, daß die Summe zweier Quadrate Null ist. Das ist nur möglich, wenn beide Summanden einzeln gleich Null sind, also insbesondere

$$h = f - g = 0 \quad \longrightarrow \quad g(t) = f(t) \qquad \text{q.e.d.}$$

Damit ist bewiesen, daß es nur eine einzige Lösung zu den gegebenen Anfangsbedingungen gibt.

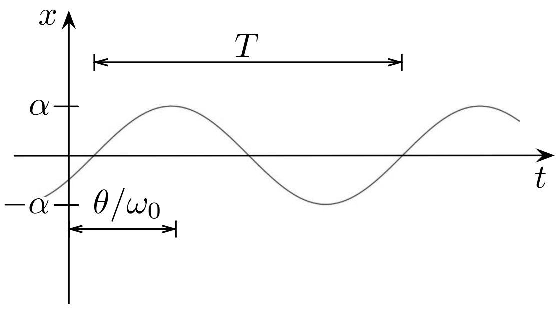
6.3 Eine andere Darstellung der Lösung

Mit den Additionstheoremen für die cos-Funktion ist

$$\begin{aligned} x &= \alpha\cos(\omega_0 t - \theta) \\ &= \alpha\cos\theta\cdot\cos\omega_0 t + \alpha\sin\theta\cdot\sin\omega_0 t\,, \end{aligned}$$

und andererseits haben wir bereits

$$x = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\,.$$



α: Amplitude, ω_0: Kreisfrequenz, θ/ω_0: Phasenverschiebung

Der Vergleich zeigt, daß α und θ Polarkoordinaten zu den kartesischen Koordinaten A und B sind,

$$A = \alpha\cos\theta\,, \quad B = \alpha\sin\theta\,.$$

Die Lösung ist durch

$$x(t) = \alpha\cos\left[\omega_0\left(t - \frac{\theta}{\omega_0}\right)\right]$$

gegeben und heißt *harmonische Schwingung*. Die Bezeichnung „harmonisch“ weist darauf hin, daß die Amplitude α nicht von der Frequenz ω_0 abhängt, sondern konstant ist. Die Kreisfrequenz ω_0 steht gemäß

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \frac{2\pi}{T}$$

in Beziehung zur Frequenz ν_0 und zur Schwingungsdauer T, wobei letztere die Zeit zwischen zwei gleichgerichteten Durchgängen z.B. durch die Nulllage ist.

6.4 Linearisierte Schwingungen, Gleichgewichtslagen

Wir betrachten weiterhin das Newtonsche Grundgesetz

$$m\ddot{x} = F(x)$$

für die eindimensionale Bewegung. Es sei x_0 eine *Nullstelle* der die Kraft beschreibenden Funktion, $F(x_0) = 0$. Die *lineare Approximation* von F an dieser Stelle x_0 ist

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0) \cdot (x - x_0) = F'(x_0) \cdot (x - x_0)\,,$$

da nach Voraussetzung $F(x_0) = 0$ ist. Damit ist das Kraftgesetz

$$m\ddot{x} = F'(x_0) \cdot (x - x_0)\,.$$

Mit der Substitution

$$\begin{aligned} \xi &\equiv x - x_0 \\ \ddot{\xi} &= \ddot{x} \end{aligned}$$

erhalten wir die Differentialgleichung

$$m\ddot{\xi} = F'(x_0) \cdot \xi\,.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.

1. Fall An der Nullstelle x_0 sei $\underline{F'(x_0) < 0}$.
Mit

$$k \equiv -F'(x_0) > 0 \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{-\frac{F'(x_0)}{m}}$$

haben wir die Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

$$m\ddot{\xi} = F'(x_0) \cdot \xi = -k\xi \quad \text{oder} \quad \ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0\,.$$

Ihre Lösung ist

$$\xi(t) = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad \text{oder} \quad x(t) = x_0 + A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t\,.$$

Wir sehen, daß für $F'(x_0) < 0$ die Nullstelle x_0 von $F(x)$ eine *stabile* Gleichgewichtslage ist, um die herum x oszilliert, immer wieder zu ihr zurückkehrt und sich nicht beliebig von ihr entfernen kann.

2. Fall An der Nullstelle x_0 sei $\underline{F'(x_0) > 0}$.
Mit

$$k \equiv F'(x_0) > 0 \quad \text{und} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{F'(x_0)}{m}}$$

erhalten wir

$$m\ddot{\xi} = F'(x_0) \cdot \xi = k\xi \quad \text{oder} \quad \ddot{\xi} - \omega_0^2 \xi = 0\,.$$

Wir konstruieren nun die Lösung für diesen Fall aus der für den Fall 1. Die Differentialgleichung $\ddot{\xi} - \omega_0^2 \xi = 0$ können wir uns aus der Gleichung $\ddot{\xi} + \omega_0^2 \xi = 0$ dadurch entstanden denken, daß wir ω_0 durch $i\omega_0$ ersetzen. Mit dieser Substitution werden nun auch die Lösungen übertragen,

$$\xi = A\cos\omega_0 t + B\sin\omega_0 t \quad \xrightarrow{\omega_0 \longrightarrow i\omega_0} \quad \begin{aligned} \xi &= A\cosh\omega_0 t + iB\sinh\omega_0 t \\ &= Ce^{\omega_0 t} + De^{-\omega_0 t}\,, \end{aligned}$$

worin $C = \frac{1}{2}(A + iB)$ und $D = \frac{1}{2}(A - iB)$ ist. Aus den Kreisfunktionen werden Hyperbelfunktionen.

Bei der Diskussion dieser Lösung, die offensichtlich keine Schwingung darstellt, unterscheiden wir wiederum zwei Fälle.

- 1. Fall: Für $C \neq 0$ und $D \neq 0$ ist $\xi \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} \infty$. Wir nennen diese Lösung eine *Runaway-Lösung*, da die Auslenkung x nicht wieder zu dem Wert x_0 zurückkehrt.

- 2. Fall: Ist aber $C = 0$ und $D \neq 0$, haben wir $\xi \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} 0$ entsprechend $x \xrightarrow{t \longrightarrow \infty} x_0$. Dieser Fall beschreibt eine *Kriechbewegung* auf den Punkt $x = x_0$ zu.

Es stellt sich also heraus, daß für $F'(x_0) > 0$ die Nullstelle x_0 eine *instabile* (labile) Gleichgewichtslage ist.

Anmerkung: Ist die Kraft $F(x)$ konservativ, läßt sie sich also gemäß $F(x) = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}$ aus einem Potential $U(x)$ ableiten, entspricht der erste Fall einem Potentialminimum (nach oben geöffnete Parabel als Approximation von $U(x)$ an der Stelle x_0) und der zweite Fall einem Potentialmaximum (nach unten geöffnete Parabel).

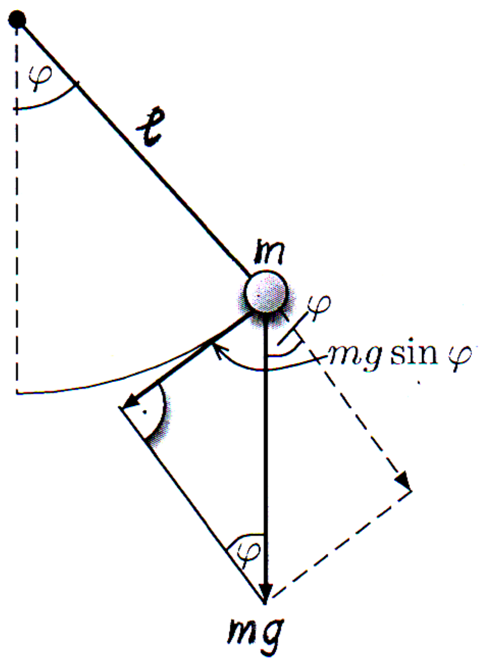
Beispiel: Das Fadenpendel Zur Illustration betrachten wir das Fadenpendel (Beispiel 9 unserer Liste mit Differentialgleichungen) mit der Bewegungsgleichung

$$m\ell\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0\,.$$

Ein Vergleich mit $m\ddot{x} = F(x)$, wobei φ anstelle von x tritt, ergibt

$$F(\varphi) = -\frac{mg}{\ell}\sin\varphi \quad \text{mit} \quad F'(\varphi) = -\frac{mg}{\ell}\cos\varphi\,.$$

Es wird $F(\varphi_0) = 0$ ...



- für $\underline{\varphi_0 = 0}$:

$$F'(0) = -\frac{mg}{\ell} < 0\,, \quad \text{stabil}$$

Die Bewegungsgleichung ist in linearer Approximation für kleine Auslenkungen wie die des Federschwingers,

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\varphi = 0,$$

mit den entsprechenden Lösungen (Beispiel 5 der Liste).
Schwingungsdauer:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{-\frac{m}{F'(0)}} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

- und für $\underline{\varphi_0 = \pi}$:

$$F'(\pi) = \frac{mg}{\ell} > 0\,, \quad \text{instabil}$$

Resultat: An der Stelle $\varphi_0 = 0$ ist das Gleichgewicht stabil, bei $\varphi_0 = \pi$ ist es instabil (invertiertes Pendel).

7 Die freie, gedämpfte Schwingung

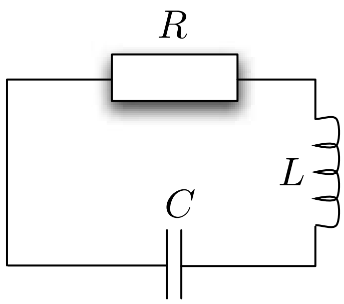
Die freie, gedämpfte Schwingung mit geschwindigkeitsproportionaler Reibung (Beispiel 6 unserer Liste von Differentialgleichungen) wird durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x}$$

charakterisiert. Dabei beschreibt der Koeffizient k mit $k > 0$ die rücktreibende Kraft und $\gamma > 0$ die Reibung, welche eine Verzögerung bewirkt ($\ddot{x} < 0$ für $\dot{x} > 0$). Diese Differentialgleichung wird oft in der Form

$$\boxed{\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0}$$

mit $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ als *Eigenfrequenz* und $\beta = \frac{\gamma}{m}$ als *Reibungskoeffizient* geschrieben. Ein verwandtes Problem ist der elektrische L-R-C-Schwingkreis (Beispiel 7 unserer Liste).



Dieser wird durch die Differentialgleichung

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L}\dot{Q} + \frac{1}{LC}Q = 0$$

beschrieben. Im übertragenen Sinne ist dabei der Ohmsche Widerstand R die Dämpfung, die Induktivität L die Trägheit und der Kehrwert $\dfrac{1}{C}$ der Kapazität die Federkonstante. Die Eigenfrequenz ist dann durch

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$$

gegeben.

7.1 Konstruktion und Diskussion der Lösung

Unsere Aufgabe besteht darin, eine lineare, homogene Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten zu lösen. Zu diesem Zweck durchlaufen wir die bekannten Lösungsschritte.

1. Schritt: Wir stellen die charakteristische Gleichung auf und erhalten

$$\lambda^2 + \beta\lambda + \omega_0^2 = 0\,, \quad (a = 1\,,\ b = \beta\,,\ c = \omega_0^2)$$

mit den Lösungen

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2}\,.$$

2. Schritt: Allgemeine Lösung
An dieser Stelle ist nun eine Fallunterscheidung erforderlich.

a) $\underline{\beta^2 - 4\omega_0^2 < 0}$

In diesem Fall sind λ_1 und λ_2 komplex, lassen sich also als

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2} \pm i\Omega$$

mit der reellen Frequenz

$$\Omega = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega_0^2 - \beta^2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\omega_0^2}} < \omega_0$$

schreiben. Die allgemeine Lösung hat dann die Gestalt

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1\, e^{i\Omega t} + c_2\, e^{-i\Omega t}\right)$$

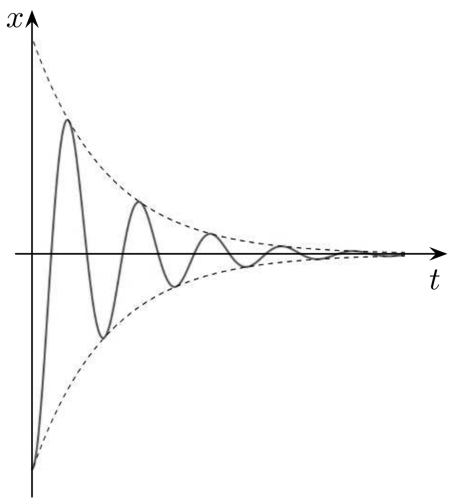
oder

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t}\,(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t)$$

oder

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t}\cdot\alpha\cos(\Omega t - \theta) \quad \text{mit} \quad A = c_1 + c_2 = \alpha\cos\theta \quad \text{und} \quad B = i(c_1 - c_2) = \alpha\sin\theta\,.$$

Diskussion und Eigenschaften dieser Lösung



Es liegt eine periodische Schwingung vor, wobei die Periodendauer (gleichgerichteter Durchgang durch die Nullage) $T = \frac{2\pi}{\Omega}$ und $\Omega < \omega_0$ ist. In dem Sinne aber, daß die Amplitude zu gleichem Ausgangswert zurückkehrt, ist die Schwingung nicht periodisch. Vielmehr wird die Amplitude exponentiell gemäß $\alpha e^{-\frac{\beta}{2}t}$, $(\beta > 0)$ gedämpft, sodass für $t \to \infty$ die Auslenkung gegen Null geht. Man bezeichnet diesen Fall als *Schwingfall* und spricht wegen $\beta < 2\omega_0$ von *schwacher* oder *unterkritischer* Dämpfung.

Schließlich betrachten wir noch ein Beispiel für spezielle Anfangsbedingungen. Es sei

$$x(0) \stackrel{!}{=} x_0 = A \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) \stackrel{!}{=} 0 = \Omega B - \frac{\beta}{2}x_0 \quad \longrightarrow \quad B = \frac{\beta}{2\Omega}x_0\,.$$

(Dem entspricht für den elektrischen Schwingkreis $Q(0) = Q_0$ und $\dot{Q}(0) = 0$, also kein Anfangsstrom.) Damit ist

$$\alpha^2 = A^2 + B^2 = x_0^2\left(1 + \frac{\beta^2}{4\Omega^2}\right) = x_0^2\,\frac{\omega_0^2}{\Omega^2}\,,$$

und wir erhalten als Partikulärlösung

$$x = \frac{x_0\omega_0}{\Omega}\,e^{-\frac{\beta}{2}t}\cos(\Omega t - \theta) \quad \text{mit} \quad \tan\theta = \frac{\beta}{2\Omega} = \frac{B}{A}.$$

b) $\underline{\beta^2 - 4\omega_0^2 > 0}$

In diesem Fall ist $\lambda_1 < 0$ und $\lambda_2 < 0$, und beide Lösungen $\lambda_{1/2}$ sind reell, sodaß wir auch

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\beta}{2} \pm \hat{\Omega}$$

schreiben können, wobei

$$\hat{\Omega} \equiv \frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4\omega_0^2} \quad \text{reell und} \quad \hat{\Omega} < \frac{\beta}{2} \quad \text{ist.}$$

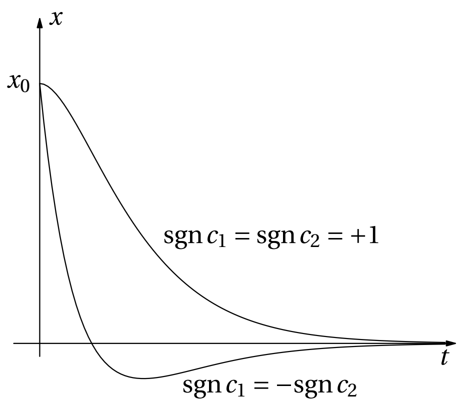
Die allgemeine Lösung ist dann

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t}\left(c_1\, e^{\hat{\Omega}t} + c_2\, e^{-\hat{\Omega}t}\right)$$

oder

$$x = e^{-\frac{\beta}{2}t}\left(A\cosh\hat{\Omega}t + B\sinh\hat{\Omega}t\right) \quad \text{mit} \quad A = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad B = c_1 - c_2\,.$$

Diskussion und Eigenschaften dieser Lösung



Offensichtlich findet keine Schwingung mehr statt, der Vorgang ist nicht periodisch. Dafür ist die starke Dämpfung verantwortlich. Erneut gilt

$$x \xrightarrow{t\longrightarrow\infty} 0\,.$$

Da die Auslenkung zur Ruhelage „kriecht“, nennt man diesen Fall, bei dem eine *überkritische (starke)* Dämpfung auftritt ($\beta > 2\omega_0$), auch den *Kriechfall*.

c) $\underline{\beta^2 - 4\omega_0^2 = 0}$

Es ist $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{\beta}{2} < 0$ (reelle Doppelwurzel), und somit hat die Lösung die allgemeine Gestalt

$$x = (c_1 + c_2 t)\, e^{-\frac{\beta}{2}t}\,.$$

Diskussion und Eigenschaften dieser Lösung Auch in diesem Fall kommt keine Schwingung zustande, und der Vorgang ist nicht periodisch. Der qualitative Verlauf der Kurve $x(t)$ ähnelt dem im Kriechfall, wobei die Einzelheiten von den Anfangsbedingungen abhängig sind. Auch hier ist die starke Dämpfung mit

$$x \xrightarrow{t\longrightarrow\infty} 0$$

Ursache dafür, daß keine Schwingung erfolgt. Diesen Fall bezeichnen wir als *aperiodischen Grenzfall* mit *kritischer* Dämpfung ($\beta = 2\omega_0$).

8 Die lineare, inhomogene Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Eine lineare, inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten hat im allgemeinen die Gestalt

$$\boxed{a\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+cy=F(x)}$$

mit $F(x)$ als Inhomogenität.

Es sei $y_h = c_1y_1 + c_2y_2$ die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung

$$ay'' + by' + cy = 0$$

(Lösungsverfahren siehe Abschnitt 5) und y_p eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. (Wie letztere zu gewinnen ist, sehen wir später.) Dann ist – wie bei den inhomogenen Differentialgleichungen 1. Ordnung – die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung 2. Ordnung

$$y = y_h + y_p = (c_1y_1 + c_2y_2) + y_p.$$

Wir zeigen zuerst, daß $y = y_h + y_p$ überhaupt eine Lösung ist. Es ist

$$\begin{aligned} a\left(y_h''+y_p''\right)+b\left(y_h'+y_p'\right)+c\left(y_h+y_p\right) &= \underbrace{\left(ay_h''+by_h'+cy_h\right)}_{=0}+\underbrace{\left(ay_p''+by_p'+cy_p\right)}_{=F(x)} \\ &= F(x) \qquad\qquad \text{q.e.d.} \end{aligned}$$

Nun beweisen wir, daß $y = y_h + y_p$ auch die einzige Lösung ist. Dazu nehmen wir an, daß es außer $y = f(x)$ eine andere Lösung $g(x)$ zu den gleichen Anfangsbedingungen gibt.

- Wenn $g(x)$ eine Lösung der inhomogenen Gleichung ist, folgt sofort, daß $[g(x) - y_p]$ eine Lösung der homogenen Gleichung ist (siehe oben).

- y_h ist jedoch die allgemeine (eindeutige) Lösung der homogenen Gleichung, und so folgt aus $g(x) - y_p = y_h$

$$g(x) = y_h + y_p = f(x) \qquad\qquad \text{q.e.d.}$$

Es bleibt nun noch die Frage zu klären, wie wir eine spezielle Lösung y_p der inhomogenen Differentialgleichung finden. Dazu werden wir drei Verfahren kennenlernen.

8.1 Lösungsverfahren 1: Zwei Differentialgleichungen 1. Ordnung

- 1. Schritt:
  Wie bei der Lösung der homogenen Gleichung beginnen wir mit der „Faktorisierung“ der linken Seite der Differentialgleichung,
  $$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_2\right)y=\frac{1}{a}F(x)\quad\text{mit}\quad\lambda_1+\lambda_2=-\frac{b}{a}\quad\text{und}\quad\lambda_1\lambda_2=\frac{c}{a}\,.$$
  Dabei ist zu beachten, daß wir zuerst eine Division durch den Koeffizienten der 2. Ableitung ausgeführt haben, was stets möglich ist, da wir $a\neq 0$ voraussetzen. Die beiden Differentialoperatoren
  $$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\right)\quad\text{und}\quad\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_2\right)$$
  sind vertauschbar, da λ_1 und λ_2 Konstanten sind.

- 2. Schritt:
  Wir setzen
  $$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_2\right)y\equiv y'-\lambda_2 y=u(x)$$
  und erhalten damit die Differentialgleichung
  $$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-\lambda_1\right)u=\frac{1}{a}F(x)\,.$$

- 3. Schritt:
  Die so erhaltene inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung für $u(x)$,
  $$u'-\lambda_1 u=\frac{1}{a}F(x)$$
  lösen wir nun durch Variation der Konstanten.

- 4. Schritt:
  Anschließend ist die inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung
  $$y'-\lambda_2 y=u(x)$$
  ebenfalls durch Variation der Konstanten zu lösen, und wir erhalten das Gesamtergebnis. Der dritte Schritt diente also dazu, die Inhomogenität der im vierten Schritt zu lösenden Differentialgleichung bereitzustellen.

Beispiel: $y''+y'-2y=e^{2x}$

- 1. Schritt:
  Die charakteristische Gleichung $\lambda^2+\lambda-2=0$ hat die Lösungen $\lambda_1=1$ und $\lambda_2=-2$, mit deren Hilfe wir die L.H.S. der Differentialgleichung faktorisieren,
  $$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}-1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}+2\right)y=e^{2x}\,.$$

- 2. Schritt:
  Wir erhalten die beiden Differentialgleichungen 1. Ordnung

$$\begin{aligned} y' + 2y &= u(x) \\ u' - u &= e^{2x}\,. \end{aligned}$$

- 3. Schritt:
  Wir lösen zuerst die Differentialgleichung $u' - u = e^{2x}$.
  - Homogene Gleichung: $\dfrac{du}{dx} = u \quad \longrightarrow \quad u = A\,e^{x}\,.$
  - Variation der Konstanten: Mit dem Ansatz $u = f(x)\,e^{x}$ gehen wir in die inhomogene Differentialgleichung ein,

$$\begin{aligned} f' \cdot e^{x} + f \cdot e^{x} - f \cdot e^{x} &= e^{2x} \\ \frac{df}{dx} &= e^{x} \quad \longrightarrow \quad f(x) = e^{x} + c_1\,. \end{aligned}$$

  - Lösung: $\qquad u = e^{2x} + c_1\,e^{x}$

- 4. Schritt:
  Mit diesem $u(x)$ lösen wir nun die Gleichung $y' + 2y = e^{2x} + c_1\,e^{x}$.
  - homogene Gleichung: $\dfrac{dy}{dx} = -2y \quad \longrightarrow \quad y = B\,e^{-2x}$
  - Variation der Konstanten: Mit dem Ansatz $y = g(x)\,e^{-2x}$ gehen wir in die inhomogene Differentialgleichung ein,

$$\begin{aligned} g' \cdot e^{-2x} - 2g \cdot e^{-2x} + 2g \cdot e^{-2x} &= e^{2x} + c_1\,e^{x} \\ \frac{dg}{dx} &= e^{4x} + c_1\,e^{3x} \\ \longrightarrow \quad g(x) &= \frac{1}{4}e^{4x} + \frac{1}{3}c_1\,e^{3x} + c_2\,. \end{aligned}$$

  - Lösung:

$$y(x) = \frac{1}{4}e^{2x} + \hat{c}_1\,e^{x} + c_2\,e^{-2x}\,, \quad \text{mit} \quad \hat{c}_1 = \frac{1}{3}c_1$$

8.2 Lösungsverfahren 2: Variation der Konstanten

Die Methode der Variation der Konstanten ist uns bereits bekannt. Sie führt auch hier zum Ziel.

- 1. Schritt:
  Zuerst lösen wir die homogene Differentialgleichung. Ihre allgemeine Lösung ist

$$y_h = c_1 y_1 + c_2 y_2\,.$$

- 2. Schritt: Variation der Konstanten
  Wir machen für die Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung den Ansatz
  $$\begin{aligned} y_p &= u(x)y_1 + v(x)y_2 \\ y_p' &= u'y_1 + uy_1' + v'y_2 + vy_2' \\ y_p'' &= u''y_1 + 2u'y_1' + uy_1'' + v''y_2 + 2v'y_2' + vy_2'' \end{aligned}$$
  und gehen damit in die Differentialgleichung ein. So erhalten wir
  $$\begin{array}{rlllll} a & (u''y_1 + 2u'y_1' & +uy_1'' & +v''y_2 + 2v'y_2' & +vy_2'') \\ +b & (u'y_1 & +uy_1' & +v'y_2 & +vy_2') \\ +c & (& uy_1 & & +vy_2) = F(x)\,. \end{array}$$
  Darin addieren sich die in der zweiten Spalte stehenden, den Faktor u enthaltenden Terme zu Null, da y_1 eine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist. Gleiches gilt für die Terme, die in der vierten Spalte stehen und den Faktor v enthalten, denn auch y_2 ist eine Lösung der homogenen Gleichung. Es bleibt
  $$a(u''y_1 + 2u'y_1' + v''y_2 + 2v'y_2') + b(u'y_1 + v'y_2) = F(x)$$
  übrig.

- 3. Schritt: Zusätzliche Vereinfachung
  Dies können wir mit einer zusätzlichen Forderung noch weiter vereinfachen, da wir ohnehin nur eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung suchen. Wenn wir
  $$u'y_1 + v'y_2 \stackrel{!}{=} 0$$
  fordern, verschwindet der Ausdruck mit dem Vorfaktor b. Leiten wir diese Forderung einmal ab,
  $$u''y_1 + u'y_1' + v''y_2 + v'y_2' = 0\,,$$
  verschwinden auch Teile des Ausdrucks mit dem Vorfaktor a, und es bleibt
  $$u'y_1' + v'y_2' = \frac{1}{a}F(x)\,.$$
  Dies zusammen mit der zusätzlichen Forderung sind zwei einfache algebraische Gleichungen zur Bestimmung von u' und v' mit der Lösung
  $$u' = -\frac{1}{a}F(x)\frac{y_2}{y_1y_2' - y_2y_1'} \quad \text{und} \quad v' = \frac{1}{a}F(x)\frac{y_1}{y_1y_2' - y_2y_1'}\,.$$
  Im Nenner beider Ausdrücke steht die Wronski-Determinante $W(x) = y_1y_2' - y_2y_1'$. Somit sind $u(x)$ und $v(x)$ zumindest bis auf Quadraturen bestimmt.

Beispiel: Wir behandeln das gleiche Beispiel wie im vorhergehenden Abschnitt, nämlich $y'' + y' - 2y = e^{2x}$, um zu sehen, wie die neue Methode zum gleichen Ergebnis führt.

Die Fundamentallösungen der homogenen Differentialgleichung und deren Ableitungen sind
$$y_1 = e^x \quad \text{mit} \quad y_1' = e^x \quad \text{und} \quad y_2 = e^{-2x} \quad \text{mit} \quad y_2' = -2e^{-2x}\,.$$

Damit ergibt sich die Wronski-Determinante zu

$$W(y_1, y_2; x) = -3e^{-x} .$$

Der gegebenen Differentialgleichung entnehmen wir weiter $a = 1$ und $F(x) = e^{2x}$ und erhalten damit

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= -e^{2x} \frac{e^{-2x}}{-3e^{-x}} = \frac{1}{3}e^{x} \quad \longrightarrow \quad u(x) = \frac{1}{3}e^{x} \\
\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} &= e^{2x} \frac{e^{x}}{-3e^{-x}} = -\frac{1}{3}e^{4x} \quad \longrightarrow \quad v(x) = -\frac{1}{12}e^{4x} .
\end{aligned}$$

Somit haben wir das Ergebnis

$$y_p = uy_1 + vy_2 = \frac{1}{3}e^{2x} - \frac{1}{12}e^{2x} = \frac{1}{4}e^{2x}$$

für die Partikulärlösung und

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{2x}$$

für die allgemeine Lösung. Diese stimmt mit dem Ergebnis aus dem vorherigen Abschnitt überein.

Auch hier empfehlen wir, sich nicht die Formeln zu merken, sondern das Verfahren stets ganz durchzuführen.
Fazit: Beide Verfahren führen sicher zum Ziel, wenigstens bis auf Quadraturen. Spezielle Ansätze führen jedoch oft (aber nicht immer!) viel schneller zum Ergebnis. Einige davon werden mit dem dritten Lösungsverfahren vorgestellt.

8.3 Lösungsverfahren 3: Methode der unbestimmten Koeffizienten

a) Die Inhomogenität ist ein Polynom $\boxed{F(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}$.

Wir machen den Ansatz

$$y_p = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_n x^n$$

mit unbestimmten Koeffizienten α_k, aber dem gleichen größten Exponenten n, also ein Polynom vom gleichen Grad. Nach Einsetzen in die Differentialgleichung erfolgt ein *Koeffizientenvergleich* gleicher x-Potenzen zur Bestimmung der Koeffizienten α_k.

Einfaches Beispiel: Die gedämpfte Schwingung eines Federschwingers mit Einbeziehung der Schwerkraft,

$$\ddot{x} + \beta\dot{x} + \omega_0^2 x = g .$$

Hierin ist $F(t) = g = a_0$ und $n = 0$. Mit dem Ansatz $x_p = \alpha_0$ und $\dot{x}_p = 0 = \ddot{x}_p$ gehen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten

$$\omega_0^2 x_p = g \quad \longrightarrow \quad x_p = \frac{g}{\omega_0^2} .$$

Eine andere Möglichkeit, dieses Beispiel zu lösen, ist die Substitution

$$x = \xi - \xi_0 \quad \text{mit} \quad \dot{x} = \dot{\xi} \quad \text{und} \quad \ddot{x} = \ddot{\xi} .$$

Damit wird die Differentialgleichung zu

$$\ddot{\xi} + \beta\dot{\xi} + \omega_0^2(\xi - \xi_0) = g\,.$$

Diese Gleichung läßt sich nun auf eine homogene Differentialgleichung zurückführen, wenn wir

$$\xi_0 = -\frac{g}{\omega_0^2}$$

wählen. Wir erkennen, daß die Schwingung im Schwerefeld genau wie die ohne Schwerefeld verläuft und sich lediglich durch die neue Ruhelage $x_p = -\xi_0$ unterscheidet.

b) Die Inhomogenität ist eine Exponentialfunktion $\boxed{F(x) = A\,e^{\varrho x}}$.

Wir machen den Ansatz

$$y_p = \alpha\,e^{\varrho x}$$

mit dem unbestimmten Koeffizienten α, aber dem gleichem Faktor ϱ im Exponenten. Die Ableitungen sind

$$y_p' = \alpha\varrho \cdot e^{\varrho x} \quad \text{und} \quad y_p'' = \alpha\varrho^2 \cdot e^{\varrho x}\,.$$

Damit wird aus der Differentialgleichung die Gleichung

$$(a\cdot\alpha\varrho^2 + b\cdot\alpha\varrho + c\cdot\alpha)\,e^{\varrho x} = A\,e^{\varrho x}$$

für den Koeffizienten α mit dem Ergebnis

$$\alpha = \frac{A}{a\varrho^2 + b\varrho + c}$$

Beispiel: Wir kommen zwecks Methodenvergleich erneut zu dem Beispiel aus dem vorhergehenden Abschnitt zurück, nämlich

$$y'' + y' - 2y = e^{2x}\,.$$

Für dieses Beispiel ist $a = b = 1$, $c = -2$, $A = 1$ und $\varrho = 2$. Daraus folgt sofort $\alpha = \frac{1}{4}$ und somit die Partikulärlösung $y_p = \frac{1}{4}e^{2x}$.

Dieses Lösungsverfahren versagt, wenn ϱ eine Lösung der charakteristischen Gleichung ist. Dann ist die Inhomogenität eine Lösung der homogenen Gleichung, und der Nenner in der Lösungsformel für α ist gleich Null. Immer dann, wenn die Inhomogenität eine Lösung der homogenen Gleichung ist, spricht man von *Resonanz*.

c) Die Inhomogenität besteht aus sinus- und cosinus-Funktionen,

$$\boxed{F(x) = a_1\cos\varrho x + a_2\sin\varrho x}\,.$$

Wir machen den Ansatz

$$y_p = \alpha_1\cos\varrho x + \alpha_2\sin\varrho x$$

mit unbestimmten Koeffizienten α_1 und α_2, aber dem gleichem Faktor ϱ. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y_p' &= -\alpha_1 \varrho \sin \varrho x + \alpha_2 \varrho \cos \varrho x \\ y_p'' &= -\alpha_1 \varrho^2 \cos \varrho x - \alpha_2 \varrho^2 \sin \varrho x\,. \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung, erhalten wir

$$\begin{aligned} a_1 \cos \varrho x + a_2 \sin \varrho x = {} & \left[-a \cdot \alpha_1 \varrho^2 + b \cdot \alpha_2 \varrho + c \cdot \alpha_1\right] \cos \varrho x \\ & + \left[-a \cdot \alpha_2 \varrho^2 - b \cdot \alpha_1 \varrho + c \cdot \alpha_2\right] \sin \varrho x\,. \end{aligned}$$

Ein Vergleich der Koeffizienten bei den sinus- und cosinus-Funktionen führt auf das algebraische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1(c - a\varrho^2) + \alpha_2 \cdot b\varrho &= a_1 \\ -\alpha_1 \cdot b\varrho + \alpha_2(c - a\varrho^2) &= a_2\,. \end{aligned}$$

zur Bestimmung von α_1 und α_2.

d) Wir fassen die bisherigen Ansätze wie folgt zusammen. Die Differentialgleichung sei in der Form

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_1\right)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - \lambda_2\right) y = e^{\varrho x} \cdot P_n(x)$$

gegeben. Für $\varrho = 0$ reduziert sich die Inhomogenität auf ein Polynom $P_n(x)$ n-ten Grades. Ist $n = 0$ (das Polynom ist eine Konstante), ist die Inhomogenität eine Exponentialfunktion. Ist schließlich ϱ eine komplexe oder rein imaginäre Zahl, besteht die Inhomogenität aus sinus- und cosinus-Funktionen. Wir haben nun drei Fälle zu unterscheiden.

- 1. Fall: $\varrho \neq \lambda_1$ und $\varrho \neq \lambda_1$
  Für die Partikulärlösung der Differentialgleichung machen wir den Ansatz

  $$y_p = e^{\varrho x} Q_n(x)$$

  mit einem Polynom n-ten Grades $Q_n(x)$. Die bisher betrachteten Beispiele gehören zu diesem Fall.

- 2. Fall: $\varrho = \lambda_1$ oder $\varrho = \lambda_2$, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$
  Wir machen den Ansatz

  $$y_p = x\, e^{\varrho x} Q_n(x)\,.$$

- 3. Fall: $\varrho = \lambda_1 = \lambda_2$
  Wir machen den Ansatz

  $$y_p = x^2\, e^{\varrho x} Q_n(x)\,.$$

Ein Beispiel für die Anwendung dieser Lösungsstrategie sind die erzwungenen Schwingungen, die in den nächsten beiden Abschnitten behandelt werden.

9 Die ungedämpfte erzwungene Schwingung

Wir betrachten Schwingungen mit periodischer Erregerkraft der Form $F(t) = F_0 \cos \omega t$ und setzen $\frac{F_0}{m} \equiv f_0$. Sie genügen der Differentialgleichung

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t \, .$$

Darin müssen wir die *Eigenfrequenz* ω_0 und die *Erregerfrequenz* ω unterscheiden. Wir haben die Koeffizienten $a = 1$, $b = \beta$ und $c = \omega_0^2$. Die Inhomogenität entspricht jener im Fall c) des oben besprochenen Verfahrens der unbestimmten Koeffizienten. Dabei ist $a_1 = f_0$, $a_2 = 0$ und $\varrho = \omega$.

Wir beginnen mit den ungedämpften erzwungenen Schwingungen ($b = \beta = 0$). In diesem Fall reduziert sich die Differentialgleichung auf

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t} \, .$$

Dem im vorangegangenen Abschnitt behandelten Verfahren folgend, erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1(\omega_0^2 - \omega^2) &= f_0 \\ \alpha_2(\omega_0^2 - \omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

mit den Lösungen

$$\alpha_1 = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = 0 \, , \quad (\omega \neq \omega_0) \, .$$

Damit ist die spezielle Lösung der inhomogenen Gleichung

$$x_p = \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \, .$$

Diskussion der Amplitude von x_p als Funktion von ω
Wir unterscheiden drei Fälle:

- <u>1. Fall</u>: $\omega \ll \omega_0$

  $$x_p \approx \frac{f_0}{\omega_0^2} \cos \omega t$$

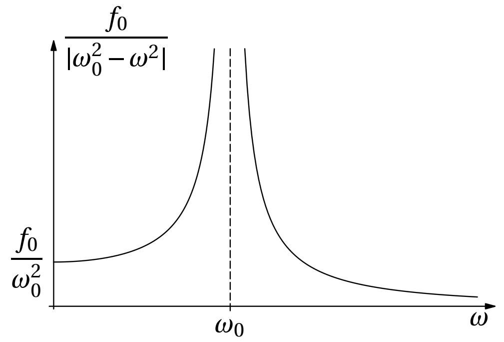
  Entscheidend für die Amplitude ist die elastische Bindung $\left(\omega_0^2 = \frac{k}{m}\right)$.

- <u>2. Fall</u>: $\omega \gg \omega_0$

  $$x_p \approx -\frac{f_0}{\omega^2} \cos \omega t$$

  Die elastische Bindung spielt keine Rolle mehr.

- <u>3. Fall</u>: $\omega = \omega_0$



Das Lösungsverfahren versagt, denn die Inhomogenität $f_0 \cos \omega_0 t$ ist eine Lösung der homogenen Differentialgleichung $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. In einem solchen Fall spricht man von einer *Resonanz* (-katastrophe). Dieser Begriff ist nicht auf trigonometrische Funktionen beschränkt.

Spezielle Anfangsbedingungen Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist für $\omega \neq \omega_0$

$$x = A \cos \omega_0 t + B \sin \omega_0 t + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t \,.$$

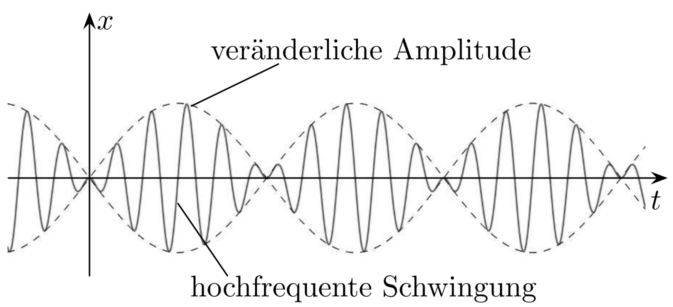
Für die speziellen Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(0) &\overset{!}{=} 0 = A + \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} &\longrightarrow\quad & A = -\frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \\ \dot{x}(0) &\overset{!}{=} 0 = B\omega_0 &\longrightarrow\quad & B = 0 \end{aligned}$$

resultiert

$$\begin{aligned} x &= \frac{f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t) \\ &= \left[\frac{2f_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \sin \frac{\omega_0 - \omega}{2} t \right] \sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t \,. \end{aligned}$$

Das Ergebnis läßt sich als eine zeitlich langsam veränderliche Amplitude (der Faktor in eckigen Klammern) für hochfrequente Schwingungen $\sin \frac{\omega_0 + \omega}{2} t$ deuten. Dies bezeichnet man als (Amplituden-) *Modulation* oder *Schwebung*. Die Differenz $\frac{\omega_0 - \omega}{2}$ nennt man *Dissonanz*.



Das Verhalten der zeitlich veränderlichen Amplitude bei *Resonanz* ist linear in t [1]:

$$\begin{aligned}
\frac{2f_0}{\omega_0^2-\omega^2}\sin\frac{\omega_0-\omega}{2}t &= \frac{2f_0}{(\omega_0-\omega)(\omega_0+\omega)}\sin\frac{\omega_0-\omega}{2}t \\
&= \frac{f_0 t}{\omega_0+\omega}\left[\frac{2}{(\omega_0-\omega)t}\sin\frac{\omega_0-\omega}{2}t\right] \\
&\xrightarrow{\omega_0\to\omega} \quad \frac{f_0 t}{2\omega_0}\,.
\end{aligned}$$

[1]Wir erzeugen den Grenzwert $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

10 Die gedämpfte erzwungene Schwingung

Für gedämpfte erzwungene Schwingungen (Beispiel 8 unserer Liste von Differentialgleichungen) ist in der Differentialgleichung

$$\boxed{\ddot{x} + \beta \dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t}$$

$b = \beta \neq 0$. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \alpha_1(\omega_0^2 - \omega^2) + \alpha_2 \beta \omega &= f_0 \\ -\alpha_1 \beta \omega + \alpha_2(\omega_0^2 - \omega^2) &= 0 \end{aligned}$$

zur Bestimmung der Koeffizienten α_1 und α_2 hat die Lösungen

$$\alpha_1 = \frac{f_0(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \quad \text{und} \quad \alpha_2 = \frac{f_0 \beta \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}\,.$$

Damit ist die spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung

$$x_p = \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \left[(\omega_0^2 - \omega^2)\cos \omega t + \beta \omega \sin \omega t\right]\,.$$

Bemerkenswert daran ist, daß in dieser Lösung auch eine sinus-Funktion auftritt, obwohl die Inhomogenität nur eine cosinus-Funktion enthält. Der Grund dafür ist das Glied mit der 1. Ableitung in der Differentialgleichung ($\beta \neq 0$).

Die allgemeine Lösung ist auch hier

$$x = x_h + x_p\,,$$

worin x_h einer der drei Fälle für die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung ist (Abschnitt 7). Für alle drei Fälle gilt aber $x_h \xrightarrow{t\to\infty} 0$. Der Lösungsbestandteil x_h ist demnach nur für den *Einschwingvorgang* relevant, der als beendet gilt, wenn die Amplitude von x_h auf den e-ten Teil abgeklungen ist. Nach dem Einschwingvorgang ist nur noch x_p von Bedeutung.
Wir wollen die Partikulärlösung noch etwas genauer betrachten.

10.1 Amplitude und Phasenwinkel

Wir schreiben

$$x_p = \alpha \cos(\omega t - \theta) = \alpha(\cos\theta \cos \omega t + \sin\theta \sin \omega t)$$

und erhalten aus dem Vergleich mit der oben stehenden Form dieser Lösung

$$\begin{aligned} \alpha \cos\theta &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \cdot (\omega_0^2 - \omega^2) \\ \alpha \sin\theta &= \frac{f_0}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \cdot \beta\omega\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\alpha^2 = \frac{f_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}$$

und

$$\sin\theta = \frac{\beta\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}.$$

Damit nimmt die Partikulärlösung die Gestalt

$$x_p = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}} \cos(\omega t - \theta) \quad \text{mit} \quad \tan\theta = \frac{\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

an. Im eingeschwungenen Zustand findet eine Schwingung wie bei einem ungedämpften harmonischen Oszillator statt, jedoch mit der *Erregerfrequenz* ω, als ob $k = m\omega^2$ wäre. Anders als beim harmonischen Oszillator ist die Amplitude aber nicht von der Frequenz ω unabhängig.

Diskussion der Amplitude $\alpha(\omega) = \dfrac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}$

Eine Kurvendiskussion ergibt:

- Es gibt keine Nullstellen.
- Es ist $\alpha(0) = \dfrac{f_0}{\omega_0^2}$ und $\alpha \xrightarrow{\omega\to\infty} +0$.
- Extremwert (Maximum)

$$\frac{d\alpha}{d\omega} = -\frac{1}{2} f_0 \cdot \frac{2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)(-2\omega) + 2\beta^2\omega}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \beta^2\omega^2\right]^{\frac{3}{2}}} \overset{!}{=} 0$$

$$\beta^2 - 2\left(\omega_0^2 - \omega^2\right) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2} \overset{!}{\geq} 0$$

Die Bedingung dafür, daß ein Maximum existiert, ist $\beta \leq \sqrt{2}\,\omega_0$. Falls diese Bedingung erfüllt ist, tritt das Maximum bei der *Resonanzfrequenz*

$$\omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{2}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta^2}{2\omega_0^2}} < \omega_0$$

auf. Es ist $\omega_R < \Omega < \omega_0$, worin $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\beta^2}{4\omega_0^2}}$ für die Frequenz der freien, gedämpften Schwingung steht. Das Maximum der Amplitude beträgt dann

$$\alpha(\omega_R) = \frac{f_0}{\beta\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\beta^2}{4}}} \xrightarrow{\beta\to 0} \infty .$$

Diskussion des Phasenwinkels $\theta(\omega) = \arctan\dfrac{\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$

Für besondere Werte von ω ist

$$\left.\begin{array}{rcr} \omega = 0 & : & \theta = 0 \\ \omega = \omega_0 & : & \theta = \frac{\pi}{2} \\ \omega \to \infty & : & \theta \to \pi \end{array}\right\} \theta \geq 0\,.$$

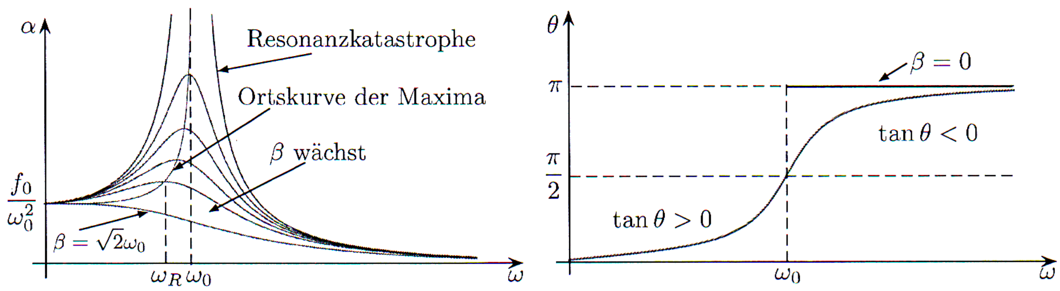
Wir fragen, zu welchen Zeiten die Erregerkraft und die Schwingung ein und dieselbe Phase ϕ erreichen (z.B. das Maximum der Auslenkung).

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Erregerkraft:} & \omega t_E \stackrel{!}{=} \phi \\ \text{Schwingung:} & \omega t_S - \theta \stackrel{!}{=} \phi \end{array}\right\} \quad \omega t_S - \theta = \omega t_E$$

Es ist also

$$t_S = t_E + \frac{\theta}{\omega} \geq t_E\,, \quad \text{da} \quad \theta \geq 0\,.$$

Also: Die Schwingung erreicht die gleiche Phase stets *nach* der Erregerkraft
$F(t) = F_0 \cos\omega t$.



10.2 Zusätzlicher Inhalt: Responsefunktion und Güte des Oszillators

Im *eingeschwungenen Zustand* haben wir die Lösung

$$x = \alpha\cos(\omega t - \theta) \quad \text{mit} \quad \dot{x} = -\alpha\omega\sin(\omega t - \theta)\,.$$

Damit sind die beiden Bestandteile der Gesamtenergie

$$\begin{aligned} & E_{\text{pot}} = \frac{m}{2}\omega^2 x^2 = \frac{m}{2}\omega^2\alpha^2\cos^2(\omega t - \theta) \\ \text{und} \qquad & E_{\text{kin}} = \frac{m}{2}\dot{x}^2 = \frac{m}{2}\omega^2\alpha^2\sin^2(\omega t - \theta)\,. \end{aligned}$$

Im *zeitlichen Mittel* über eine Periode erhalten wir mit der Substitution $z = \omega t - \theta$, entsprechend $\mathrm{d}z = \omega\,\mathrm{d}t$, und mit $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_0^T \sin^2(\omega t - \theta)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\int_{t=0}^{T} \sin^2 z\,\frac{\mathrm{d}z}{\omega} = \frac{1}{\omega T}\left[\frac{z}{2} - \frac{1}{4}\sin 2z\right]_{t=0}^{T} \\
&= \frac{1}{2\omega T}\left[(\omega t - \theta) - \frac{1}{2}\sin 2(\omega t - \theta)\right]_0^T \\
&= \frac{1}{2\omega T}\cdot \omega T = \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

und auf die gleiche Weise

$$
\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t - \theta)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^T [1 - \sin^2(\omega t - \theta)]\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.
$$

Die zeitlichen Mittelwerte der kinetischen und potentiellen Energie ergeben sich daraus zu

$$
\begin{aligned}
\overline{E}_{\text{kin}} &= \frac{m}{2}\overline{\dot{x}^2} = \frac{m}{2}\omega^2\alpha^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2\alpha^2 \\
\overline{E}_{\text{pot}} &= \frac{m}{2}\omega^2\overline{x^2} = \frac{m}{2}\omega^2\alpha^2\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}m\omega^2\alpha^2 .
\end{aligned}
$$

Wir haben insbesondere $\overline{E}_{\text{kin}} = \overline{E}_{\text{pot}}$ erhalten, ein Sachverhalt, der in der Mechanik als Virialsatz (hier für das Oszillatorpotential) bekannt ist.

Die zeitlich gemittelte Gesamtenergie ist

$$
\overline{E} = \overline{E}_{\text{kin}} + \overline{E}_{\text{pot}} = \frac{1}{2}m\omega^2\alpha^2 \propto \alpha^2 \quad \text{mit} \quad \alpha = \alpha(\omega).
$$

Mit der oben gefundenen Abhängigkeit der Amplitude von der Erregerfrequenz haben wir explizit

$$
\overline{E} = \overline{E}(\omega) = \frac{mf_0^2}{2}\frac{\omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2},
$$

und mit

$$
\overline{E}(\omega_0) = \frac{mf_0^2}{2}\cdot\frac{1}{\beta^2}
$$

wird

$$
\overline{E}(\omega) = \overline{E}(\omega_0)\frac{1}{\dfrac{(\omega_0^2 - \omega^2)^2}{\omega^2\beta^2} + 1}.
$$

Diese Funktion heißt *Responsefunktion*, die wir nun nach den Regeln einer Kurvendiskussion untersuchen.

- Es ist $\overline{E}(0) = 0$ und $\overline{E}(\omega) \xrightarrow{\omega\to\infty} +0$. Die Funktion hat keine Nullstellen.
- Extremwert (Maximum): Aus der Bedingung

$$\frac{\mathrm{d}\overline{E}}{\mathrm{d}\omega} = \frac{mf_0^2}{2} \cdot \frac{2\omega\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\left(\omega_0^2 + \omega^2\right)}{\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \beta^2\omega^2\right]^2} \stackrel{!}{=} 0$$

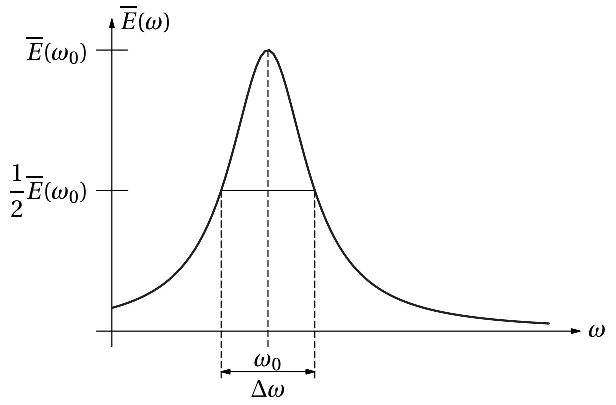
  folgt eine Resonanz an der Stelle $\omega = \omega_0$ mit der Höhe $\overline{E}(\omega_0)$.

- In der *Nähe der Resonanzstelle*, also bei $\omega \approx \omega_0$ ist näherungsweise

$$\omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0(\omega_0 - \omega)$$

  und aus der Responsefunktion wird die *Lorentz-Kurve*

$$\overline{E}(\omega) \approx \frac{\overline{E}(\omega_0)}{1 + \frac{4}{\beta^2}(\omega_0 - \omega)^2}\,.$$



Die Lorentz-Kurve hat die *Halbwertsbreite*

$$\overline{E}(\omega) \stackrel{!}{=} \frac{1}{2}\overline{E}(\omega_0) \longrightarrow |\omega_0 - \omega| = \frac{\beta}{2}\,,$$

also

$$\Delta\omega = 2|\omega_0 - \omega| = \beta\,.$$

Also: Je geringer die Dämpfung, desto kleiner die Halbwertsbreite $\Delta\omega$ (desto größer die „Trennschärfe“).

Wir formulieren dieses Ergebnis abschließend mit dem Begriff der *Abklingzeit* τ anstelle der Dämpfung β. Die Abklingzeit beantwortet die Frage, nach welcher Zeit die Energie der gedämpften Schwingung auf $1/e \approx 0{,}3679$ abgefallen ist. Da die Dämpfungsamplitude in der Lösung x_h der homogenen Differentialgleichung gemäß $e^{-\beta t/2}$ abfällt und die Energie proportional zum Amplitudenquadrat ist, fordern wir $(-\beta)\tau \stackrel{!}{=} -1$ und erhalten

$$\tau = \frac{1}{\beta} \quad \text{und} \quad \Delta\omega = \frac{1}{\tau} \quad \text{oder} \quad \tau \cdot \Delta\omega = 1\,.$$

(Vorausblickend auf weitere Studien seien hier nur die Begriffe „Fourier-Transformation“ und „Unschärferelation“ genannt.)

Ein Oszillator hat eine hohe Güte, wenn er innerhalb der Abklingzeit τ viele Schwingungen ausführen kann, wenn also die Dämpfung klein ist. Um dies zu beschreiben, definieren wir die *Güte eines Oszillators* oder den *Q-Faktor* (Q: quality)

$$Q \equiv \omega_0 \cdot \tau = 2\pi\frac{\tau}{T} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{\omega_0}{\beta}\,.$$

Beispiele sind:

	ω_0	β	$\Delta\omega$	Q
Federschwinger	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{\gamma}{m}$	$\frac{\gamma}{m}$	$\frac{1}{\gamma}\sqrt{mk}$
elektrischer Schwingkreis	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$	$\frac{R}{L}$	$\frac{R}{L}$	$\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

11 Potenzreihen-Lösungen von gewöhnlichen Differentialgleichungen: Der harmonische Oszillator

Wir präsentieren ein weiteres Verfahren zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen, das hauptsächlich bei den linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit nicht konstanten Koeffizienten eingesetzt wird. Dieser Gleichungstyp ist nicht Gegenstand dieses Kurses. Gleichwohl erkennen wir alle wesentlichen Schritte dieses Verfahrens, wenn wir es auf Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten anwenden, hier sogar auf die einfache Gleichung vom Typ der Gleichung für den harmonischen Oszillator.

Obwohl uns die Lösungen längst bekannt sind, lösen wir also noch ein weiteres Mal die Gleichung

$$\boxed{y'' + \omega^2 y = 0}\,.$$

Diese hat konstante Koeffizienten, ihre Fundamentallösungen sind

$$y_1 = \cos\omega x \quad \text{und} \quad y_2 = \sin\omega x\,.$$

Nur dann, wenn die unabhängige Variable die Zeit ist, hat ω die Bedeutung einer (Kreis-) Frequenz.

Jetzt nehmen wir den Standpunkt ein, daß wir die Lösungen dieser Gleichung noch nicht kennen. Wir suchen sie mit Hilfe des *Reihenansatzes* (Frobenius-Reihe)

$$\begin{aligned} y = x^\lambda \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} \\ &= a_0 x^\lambda + a_1 x^{\lambda+1} + a_2 x^{\lambda+2} + \ldots \quad \text{mit} \quad a_0 \neq 0\,. \end{aligned}$$

Darin sind λ und alle Koeffizienten a_k unbekannt. Die Ableitungen sind

$$\begin{aligned} y' &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k) a_k x^{\lambda+k-1} \\ y'' &= \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)(\lambda+k-1) a_k x^{\lambda+k-2}\,. \end{aligned}$$

Einsetzen in Differentialgleichung ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda+k)(\lambda+k-1) a_k x^{\lambda+k-2} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} = 0\,.$$

Unser Ziel ist ein *Koeffizientenvergleich* für gleiche x-Potenzen. Diese müssen in den beiden Summen aber erst hergestellt werden. Das geschieht in folgenden Schritten:

- 1. Schritt: Wir führen in der ersten Summe die *Indextransformation* $k = n + 2$ aus und beachten, daß diese auch die untere Grenze des Summationsintervalls von $k = 0$ nach $n = -2$ verschiebt. So erhalten wir

$$\sum_{n=-2}^{\infty} (\lambda + n + 2)(\lambda + n + 1) a_{n+2} x^{\lambda+n} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} = 0\,.$$

- 2. Schritt: Der Summationsindex n ist ein „stummer" Index, den wir nach Belieben umbenennen können. (Zum Vergleich: Die Integrationsvariable in bestimmten Integralen ist auch „stumm", darf also umbenannt werden, da sie nach Einsetzen der Integrationsgrenzen im Ergebnis nicht mehr vorkommt.) Daher nennen wir den Summationsindex n nun wieder k, also so wie in der zweiten Summe. Dann ist

$$\sum_{k=-2}^{\infty} (\lambda + k + 2)(\lambda + k + 1) a_{k+2} x^{\lambda+k} + \omega^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\lambda+k} = 0\,.$$

- 3. Schritt: Nun fällt auf, daß die Summationsintervalle beider Summen nicht übereinstimmen. Daher schreiben wir die Summanden mit $k = -2, -1$ in der ersten Summe aus und fassen dann den „Rest" dieser Summe, der mit $k = 0$ beginnt, mit der zweiten Summe zusammen,

$$\lambda(\lambda - 1) a_0 x^{\lambda-2} + (\lambda + 1)\lambda a_1 x^{\lambda-1} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\lambda + k + 2)(\lambda + k + 1) a_{k+2} + \omega^2 a_k\right] x^{\lambda+k} = 0\,.$$

Nun ist ein Koeffizientenvergleich möglich, wobei auf der rechten Seite der Gleichung jede x-Potenz den Vorfaktor Null hat. Wir erhalten:

- Koeffizient von $x^{\lambda-2}$: Da $a_0 \neq 0$ vorausgesetzt wurde, ist

  $$\lambda(\lambda - 1) = 0\,.$$

  Die Lösungen dieser *Indexgleichung* sind $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$.

- Koeffizient von $x^{\lambda-1}$: Es ist

  $$(\lambda + 1)\lambda a_1 = 0\,.$$

  Diese Bedingung ist für $\lambda = 1$ durch $a_1 = 0$ erfüllbar. Für $\lambda = 0$ ist a_1 beliebig, so daß wir auch in diesem Fall $a_1 = 0$ setzen können.

- Koeffizienten von $x^{\lambda+k}$ für $k \geq 0$: Es ist

  $$(\lambda + k + 2)(\lambda + k + 1) a_{k+2} + \omega^2 a_k = 0\,,$$

  woraus die *Rekursionsformel*

  $$a_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(\lambda + k + 2)(\lambda + k + 1)} a_k$$

  folgt.

Wir diskutieren diese Rekursionsformel getrennt für die beiden Lösungen $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ der Indexgleichung. Da $a_1 = 0$ ist, erhalten wir nur Koeffizienten mit geradzahligen Indizes.

a) <u>1. Fall: $\lambda = 0$</u>
Die Rekursionsformel ist

$$a_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+2)(k+1)} a_k \,.$$

Wir berechnen die ersten Koeffizienten und drücken diese nicht nur durch ihren Vorgänger, sondern auch durch a_0 aus.

- <u>$k=0$</u>: $a_2 = -\frac{\omega^2}{2} a_0$
- <u>$k=2$</u>: $a_4 = -\frac{\omega^2}{4\cdot 3} a_2 = \frac{\omega^4}{4\cdot 3\cdot 2} a_0$
- <u>$k=4$</u>: $a_6 = -\frac{\omega^2}{6\cdot 5} a_4 = -\frac{\omega^6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} a_0$

  $\vdots$

Durch vollständige Induktion finden wir das Bildungsgesetz

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} a_0 \,, \qquad (n = 0,\, 1,\, 2,\, \ldots)\,.$$

b) <u>2. Fall: $\lambda = 1$</u>
Die Rekursionsformel ist

$$a_{k+2} = -\frac{\omega^2}{(k+3)(k+2)} a_k \,.$$

Wir verfahren weiter wie im ersten Fall und erhalten

- <u>$k=0$</u>: $a_2 = -\frac{\omega^2}{3\cdot 2} a_0$
- <u>$k=2$</u>: $a_4 = -\frac{\omega^2}{5\cdot 4} a_2 = \frac{\omega^4}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} a_0$
- <u>$k=4$</u>: $a_6 = -\frac{\omega^2}{7\cdot 6} a_4 = -\frac{\omega^6}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} a_0$

  $\vdots$

Durch vollständige Induktion finden wir in diesem Fall

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n+1)!} a_0 \,.$$

Durch Einsetzen dieser Koeffizienten in den Reihenansatz gelangen wir zu den beiden Lösungen

a) <u>1. Fall: $\lambda = 0$</u>

$$\begin{aligned} y_1 = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n)!} x^{2n} &= a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\omega x)^{2n} \\ &= a_0 \left[1 - \frac{1}{2}(\omega x)^2 + \frac{1}{24}(\omega x)^4 - + \ldots \right] \end{aligned}$$

b) <u>2. Fall: $\lambda = 1$</u>

$$y_2 = a_0 x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \omega^{2n}}{(2n+1)!} x^{2n} = \frac{a_0}{\omega} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\omega x)^{2n+1}$$
$$= \frac{a_0}{\omega} \left[\omega x - \frac{1}{6}(\omega x)^3 + \frac{1}{120}(\omega x)^5 - + \ldots \right] .$$

Wir erkennen in den eckigen Klammern die Reihenentwicklungen für die cosinus-Funktion (1. Fall) und die sinus-Funktion (2. Fall) wieder, sind also durch Reihenentwicklung zu den uns bereits bekannten Fundamentallösungen, multipliziert mit den Konstanten a_0 und $\frac{a_0}{\omega}$, gelangt,

$$y_1 = a_0 \cos \omega x \quad \text{und} \quad y_2 = \frac{a_0}{\omega} \sin \omega x \, .$$

Anmerkungen

- Wir haben gezeigt, daß die Lösungen unserer Differentialgleichung die erhaltene Gestalt haben, falls sie überhaupt existieren. Dazu ist noch zu zeigen, daß die Reihenlösungen konvergieren, wofür verschiedene Kriterien zur Verfügung stehen. Im vorliegenden Fall können wir diesen Schritt sparen, da die Reihenkonvergenz wegen der sinus- und cosinus-Lösungen feststeht.

- Stellen wir uns für einen Moment vor, die Geschichte wäre nicht so verlaufen, daß wir die sinus- und cosinus-Funktionen etwa von der Geometrie rechtwinkliger Dreiecke her längst kannten, bevor wir die Oszillatorgleichung lösen mußten. Dann hätten wir die Reihenlösungen vielleicht als „Oszillatorfunktionen 1. und 2. Art" bezeichnet und nachträglich ihre Eigenschaften untersucht. Im allgemeinen, also bei den Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten ist genau das der Fall. Die Reihenlösungen z.B. der Besselschen Differentialgleichung definieren Funktionen wie die Bessel-Funktionen, die tabelliert und deren Eigenschaften studiert werden.

12 Nichtlineare Pendelschwingungen

Wir wenden uns den nichtlinearen Pendelschwingungen zu (Beispiel 9 der eingangs präsentierten Liste von Differentialgleichungen).

Von der nichtlinearen Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \sin\varphi = 0 \quad \text{mit} \quad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell}\,.$$

für die Schwingungen eines Fadenpendels wissen wir, daß ihre linearisierte Form ($\sin\varphi \approx \varphi$)

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = 0\,.$$

harmonische Schwingungen beschreibt; die Frequenz hängt nicht von der Amplitude ab.

12.1 Schwach anharmonische Pendelschwingungen

Wir beschränken uns vorerst weiterhin auf kleine Auslenkungen φ, nehmen aber das nächste Glied in der Entwicklung der Nichtlinearität hinzu,

$$\sin\varphi \approx \varphi - \frac{\varepsilon}{6}\varphi^3\,,$$

was zu schwach anharmonischen Pendelschwingungen führen wird. In dieser Entwicklung ist zwar $\varepsilon = 1$, aber wir behalten diesen Faktor bei, um Terme zu identifizieren, die von der schwachen Nichtlinearität herrühren.

Die Bewegungsgleichung ist

$$\boxed{\ddot{\varphi} + \omega_0^2 \varphi = \frac{\varepsilon}{6}\omega_0^2 \varphi^3}$$

Wir suchen ihre Lösung durch Reihenentwicklung und machen dafür den Ansatz

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots \quad \text{mit} \quad \varphi^3 = \varphi_0^3 + 3\varepsilon\varphi_0^2\varphi_1 + \ldots\,.$$

Die Anfangsbedingungen für $t = 0$ seien

$$\varphi_0(0) = \varphi_{\max} \ll 1\,, \quad \dot{\varphi}_0(0) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_1(0) = 0 \quad \dot{\varphi}_1(0) = 0\,.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$(\ddot{\varphi}_0 + \varepsilon\ddot{\varphi}_1 + \ldots) + \omega_0^2(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1 + \ldots) = \frac{\varepsilon}{6}\omega_0^2(\varphi_0^3 + 3\varepsilon\varphi_0^2\varphi_1 + \ldots)\,.$$

Durch Vergleich der Koeffizienten von ε-Potenzen und Beschränkung auf Terme linear in ε erhalten wir

a) $\underline{\varepsilon^0}$: ungestörtes Pendel, homogene Gleichung

$$\ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = 0\,, \quad \text{Lösung:} \quad \varphi_0 = \varphi_{\max}\cos\omega_0 t$$

b) $\underline{\varepsilon^1}$: Einsetzen von φ_0 (sukzessive Approximation) führt auf die inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2 \varphi_1 = \frac{1}{6}\omega_0 \varphi_0^3 = \frac{1}{6}\omega_0^2 \cdot \varphi_{\max}^3 \cos^3 \omega_0 t$$
$$= \frac{1}{24}\omega_0^2 \varphi_{\max}^3 (\cos 3\omega_0 t + 3\cos \omega_0 t)$$

für φ_1. Ihre Lösung besteht aus der Lösung $\varphi_{1,h}$ der zugehörigen homogenen Differentialgleichung und der Partikulärlösung der inhomogenen Gleichung. Letztere konstruieren wir mit Hilfe uns bekannter spezieller Ansätze. Zu diesem Zweck haben wir die Funktion $\cos^3 \omega_0 t$ in die Summe zweier cosinus-Funktionen zerlegt. Beide Inhomogenitäten dürfen einzeln behandelt werden, da die Summe zweier Lösungen dieser zwar inhomogenen, aber in φ_1 linearen Gleichung wieder eine Lösung ist (Superpositionsprinzip).

Lösung:

$$\varphi_1 = \varphi_{1,h} + \varphi_{1,p}^{(I)} + \varphi_{1,p}^{(II)}$$

mit

$$\varphi_{1,p}^{(I)} = -\frac{1}{192}\varphi_{\max}^3 \cos 3\omega_0 t$$
$$\varphi_{1,p}^{(II)} = \frac{1}{16}\varphi_{\max}^3 (\omega_0 t \sin \omega_0 t + 2\cos \omega_0 t)\,.$$

Darin ist der Teil $\varphi_{1,p}^{(I)}$ der Partikulärlösung durch die zu $\cos 3\omega_0 t$ proportionale Inhomogenität, $\varphi_{1,p}^{(II)}$ durch die zu $\cos \omega_0 t$ proportionale Inhomogenität erzeugt worden. Dieser Teil der Inhomogenität ist aber eine Lösung der homogenen Differentialgleichung. Dadurch entsteht das Problem, daß ein *säkularer Term* in $\varphi_{1,p}^{(II)}$ auftritt, der linear mit t wächst. Obwohl Störung klein ist, divergiert die Reihenentwicklung!

Versuch einer Lösung Wir führen das bisherige Verfahren noch einmal durch, ändern dabei aber auch die Frequenz durch einen Störterm

$$\omega = \omega_0 + \varepsilon\omega_1 + \ldots \quad \text{mit} \quad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1 + \ldots\,,$$

wobei wir uns nach wie vor auf lineare Terme in ε beschränken. Außerdem betrachten wir φ als Funktion der neuen, dimensionslosen Variablen ωt und bezeichnen die Ableitung nach dieser Variablen mit $\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}(\omega t)} \equiv \varphi'$. Dann ist

$$\ddot{\varphi} = \omega^2 \frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}(\omega t)^2} \equiv \omega^2 \varphi'' = \left(\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1\right)\varphi''\,.$$

Einsetzen in die Bewegungsgleichung ergibt

$$\left(\omega_0^2 + 2\varepsilon\omega_0\omega_1\right)\left(\varphi_0'' + \varepsilon\varphi_1''\right) + \omega_0^2(\varphi_0 + \varepsilon\varphi_1) = \frac{\varepsilon}{6}\omega_0^2\left(\varphi_0^3 + 3\varepsilon\varphi_0^2\varphi_1\right)\,.$$

Vergleich der Koeffizienten von ε-Potenzen:

a) $\underline{\varepsilon^0}$:

$$\varphi_0'' + \varphi_0 = 0 \quad \text{oder} \quad \ddot{\varphi}_0 + \omega_0^2\varphi_0 = 0\,, \quad \text{Lösung:} \quad \varphi_0 = \varphi_{\max}\cos\omega_0 t$$

b) $\underline{\varepsilon^1}$:

$$\varphi_1'' + \varphi_1 = \frac{1}{6}\varphi_0^3 + 2\frac{\omega_1}{\omega_0}\varphi_0$$

oder

$$\begin{aligned}\ddot{\varphi}_1 + \omega_0^2\varphi_1 &= \frac{1}{6}\omega_0^2\varphi_{\max}^3\cos^3\omega_0 t + 2\omega_0\omega_1\cdot\varphi_{\max}\cos\omega_0 t\\ &= \frac{1}{24}\omega_0^2\varphi_{\max}^3\cos 3\omega_0 t + \frac{1}{8}\omega_0\varphi_{\max}\left(\omega_0\varphi_{\max}^2 + 16\omega_1\right)\cos\omega_0 t\end{aligned}$$

Wir wissen bereits, daß die zu $\cos\omega_0 t$ proportionale Inhomogenität einen säkularen Term erzeugt, der verschwinden muß, damit die Reihenentwicklung für φ nicht divergiert. Jetzt besteht die Möglichkeit, ω_1 so zu wählen, daß der Koeffizient vor $\cos\omega_0 t$ verschwindet:

$$\omega_1 = -\frac{1}{16}\omega_0\varphi_{\max}^2 .$$

<u>Resultat</u>: Frequenz und Schwingungsdauer werden von der Amplitude abhängig, somit ist die Schwingung anharmonisch,

$$\omega = \omega_0\left(1 - \frac{1}{16}\varphi_{\max}^2\right) \quad \text{entsprechend} \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\varphi_{\max}^2\right) ,$$

und die Reihe in φ konvergiert,

$$\varphi_1 = \varphi_{1,h} - \frac{1}{192}\varphi_{\max}^3\cos 3\omega_0 t .$$

Lösung zu den Anfangsbedingungen:

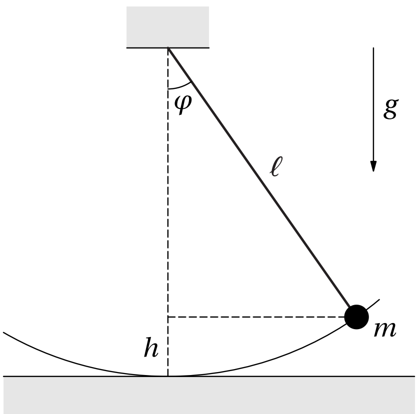
$$\varphi_1 = \frac{1}{192}\varphi_{\max}^3(\cos\omega_0 t - \cos 3\omega_0 t)$$

12.2 Das Fadenpendel mit beliebig großen Ausschlägen

Wir wenden uns der nichtlinearen Schwingungsgleichung

$$m\ell\ddot{\varphi} + mg\sin\varphi = 0$$

eines Fadenpendels zu (Beispiel 9 auf unserer Liste von Differentialgleichungen). Wegen der gemachten Näherungen (der Pendelkörper ist ein Massenpunkt, der Faden ist masselos und starr, und in der Aufhängung findet keine Reibung statt) heißt dieses Pendel auch *Kreispendel* oder *mathematisches Pendel*.



Mit der Bahngeschwindigkeit $\ell\dot{\varphi}$ des Pendelkörpers und seiner Anhebung $h = \ell(1 - \cos\varphi)$ über den tiefsten Punkt seiner Kreisbahn gilt der Energie-Erhaltungssatz

$$\frac{m}{2}\ell^2\dot{\varphi}^2 + mg\ell(1 - \cos\varphi) = mg\ell\left(1 - \cos\varphi_{\max}\right) ,$$

worin $\varphi_{\max}$ mit $\dot{\varphi}|_{\varphi_{\max}} = 0$ die Winkelamplitude bedeutet. Danach ist

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2g}{\ell}(\cos\varphi - \cos\varphi_{\max})} .$$

Der Energie-Erhaltungssatz gibt uns ein *erstes Integral* der Bewegungsgleichung. Es ist noch ein Integrationsschritt auszuführen, der die implizite Lösung

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_{\max}}}$$

ergibt. Im günstigsten Fall ist das Integral ausführbar und das Ergebnis kann nach der gesuchten Funktion $\varphi = \varphi(t)$ aufgelöst werden. Nicht so hier: Das Integral widersetzt sich allen bekannten Integrationsmethoden und kann nicht durch elementare Funktionen dargestellt werden.

Wir beschränken uns im folgenden darauf, die Schwingungsdauer des Pendels zu berechnen. Diese ist

$$T = 4 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int\limits_0^{\varphi_{\max}} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_{\max}}} \,,$$

wobei der Faktor 4 daher kommt, daß T die Zeit zwischen zwei gleichgerichteten Durchgängen durch Nullage ist.

Wir formen dieses Integral in mehreren Schritten um.

- 1. Schritt: Die Anwendung der Additionstheoreme für die cosinus-Funktion ergibt

$$\begin{aligned} \cos\varphi - \cos\varphi_{\max} &= \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\right) - \left(1 - 2\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2}\right) \\ &= 2\left(\sin^2\frac{\varphi_{\max}}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) . \end{aligned}$$

- 2. Schritt: Einführung des Moduls

$$k \equiv \sin\frac{\varphi_{\max}}{2}$$

sowie der neuen Variablen u gemäß

$$\sin\frac{\varphi}{2} \equiv k\sin u \,.$$

- 3. Schritt: Damit substituieren wir in dem Integral für die Schwingungsdauer

$$\begin{aligned} \cos\varphi - \cos\varphi_{\max} &= 2\left(k^2 - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2k^2(1 - \sin^2 u) = 2k^2\cos^2 u \end{aligned}$$

und

$$k\cos u \;\mathrm{d}u = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\;\mathrm{d}\varphi \,.$$

Die Integrationsgrenzen sind $u = 0$ für $\varphi = 0$ und $u = \frac{\pi}{2}$ für $\varphi = \varphi_{\max}$.

- 4. Schritt: Resultat

$$
\begin{aligned}
T &= 4 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \int_0^{\pi/2} \frac{k \cos u \, \mathrm{d}u}{\frac{1}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \cdot \sqrt{2} k \cos u} \\
&= 4 \cdot \sqrt{\frac{\ell}{2g}} \sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\cos \frac{\varphi}{2}} \\
&= 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{\varphi}{2}}} \\
&= 4 \sqrt{\frac{\ell}{g}} \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \, .
\end{aligned}
$$

Das erhaltene Integral

$$
K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} \quad \text{mit} \quad k = \sin \frac{\varphi_{\max}}{2}
$$

ist ein *vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung*. Dieses kann nicht durch elementare Funktionen dargestellt werden. In der Tabelle sind stattdessen einige Zahlenwerte zusammengestellt.

Tabelle 12.1: Das vollständige elliptische Integral 1. Gattung $K(k)$
Es ist $k = \sin\alpha$, sodaß $\alpha = \frac{\varphi_{\max}}{2}$.

$\alpha/1°$	K	$\alpha/1°$	K	$\alpha/1°$	K	$\alpha/1°$	K	$\alpha/1°$	K	$\alpha/1°$	K
0	1,5708	15	1,5981	30	1,6858	45	1,8541	60	2,1565	75	2,7681
1	1,5709	16	1,602	31	1,6941	46	1,8691	61	2,1842	76	2,8327
2	1,5713	17	1,6061	32	1,7028	47	1,8848	62	2,2132	77	2,9026
3	1,5719	18	1,6105	33	1,7119	48	1,9011	63	2,2435	78	2,9786
4	1,5727	19	1,6151	34	1,7214	49	1,918	64	2,2754	79	3,0617
5	1,5738	20	1,62	35	1,7312	50	1,9356	65	2,3088	80	3,1534
6	1,5751	21	1,6252	36	1,7415	51	1,9539	66	2,3439	81	3,2553
7	1,5767	22	1,6307	37	1,7522	52	1,9729	67	2,3809	82	3,3699
8	1,5785	23	1,6365	38	1,7633	53	1,9927	68	2,4198	83	3,5004
9	1,5805	24	1,6426	39	1,7748	54	2,0133	69	2,461	84	3,6519
10	1,5828	25	1,649	40	1,7868	55	2,0347	70	2,5046	85	3,8317
11	1,5854	26	1,6557	41	1,7992	56	2,0571	71	2,5507	86	4,0528
12	1,5882	27	1,6627	42	1,8122	57	2,0804	72	2,5998	87	4,3387
13	1,5913	28	1,6701	43	1,8256	58	2,1047	73	2,6521	88	4,7427
14	1,5946	29	1,6777	43	1,8396	59	2,13	74	2,7081	89	5,4349
										90	∞

Diskussion Mit $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ schreiben wir das Ergebnis für die Schwingungsdauer in der Form

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}} \cdot K(k) = T_0 \cdot \frac{2}{\pi} K(k)\,.$$

Der Korrekturfaktor $\frac{2}{\pi}K(k)$ kann für einige ausgewählte Werte für $\varphi_{\max}$ der folgenden Tabelle entnommen werden.

Tabelle 12.2: Der Korrekturfaktor $\frac{2}{\pi}K(k)$ für ausgewählte Werte für $\varphi_{\max}$

$\varphi_{\max}$	6°	10°	40°	90°	180°
$\frac{2}{\pi}K(k)$	1,000703	1,001912	1,031324	1,180357	∞

- Schwingungsdauer und Frequenz sind über $k = \sin\frac{\varphi_{\max}}{2}$ von der Amplitude $\varphi_{\max}$ abhängig; die Schwingung ist anharmonisch.
- Von diesem höheren Standpunkt aus ist die für kleine Auslenkungen $\varphi_{\max} \lesssim 10°$ üblicherweise gemachte harmonische Näherung ($T \approx T_0$) gerechtfertigt. Der Fehler ist

angebbar.

- Für das elliptische Integral gilt die Reihenentwicklung

$$K(k) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}k^2 + \frac{9}{64}k^4 + \dots\right) .$$

Für kleine Auslenkungen $\varphi_{\max} \ll 1$ schreiben wir $\sin\varphi_{\max} \approx \varphi_{\max}$, sodaß $k \approx \frac{\varphi_{\max}}{2}$ ist und erhalten bei Beschränkung auf die ersten beiden Glieder der Reihenentwicklung die Schwingungsdauer

$$T \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{16}\varphi_{\max}^2\right)$$

für schwach anharmonische Schwingungen. Dieses Resultat stimmt mit dem aus dem vorangegangenen Abschnitt überein.

- Ersetzen wir den Faden des Pendels durch eine masselose, starre Stange und wählen $\varphi_{\max} = 180^\circ$ (invertiertes Pendel), entspricht der unendlich großen Schwingungsdauer die Kriechbewegung, die uns bei der Diskussion instabiler Gleichgewichtspunkte begegnet ist.

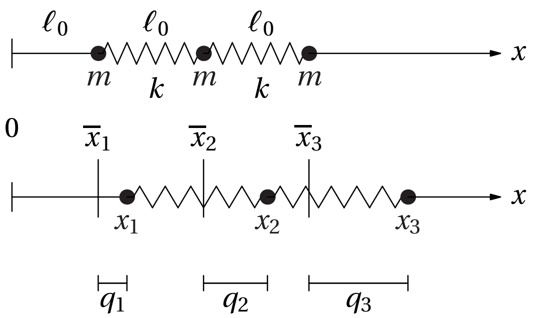
13 Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten: Die lineare Oszillatorkette

Es ist grundsätzlich interessant, wie Systeme von Differentialgleichungen gelöst werden können. Oszillatorketten haben aber auch interessante Anwendungen. Dazu zählen beispielsweise Molekülschwingungen und für sehr große Anzahlen von Oszillatoren der Übergang zur Kontinuumsmechanik (Längsschwingungen eines Stabes) und zur Feldtheorie.

13.1 Normalschwingungen

Wir untersuchen das Schwingungsverhalten einer linearen Kette von Oszillatoren, wobei wir zur Vereinfachung annehmen, daß deren Masse m, die Federkonstanten k und die Ruhelängen ℓ_0 der Federn jeweils gleich sind. Das Beispiel einer Kette mit drei Oszillatoren enthält bereits alle Charakteristika einer längeren Kette.

Aufstellung der Differentialgleichungen ($j = 1, 2, \ldots, n$):



(zur Vereinfachung: m und k überall gleich)

- Entspannte Federn

$$\text{Ruhelagen:} \quad \overline{x}_j = j \cdot \ell_0$$
$$\text{Federlängen:} \quad \ell_0 = \overline{x}_{j+1} - \overline{x}_j$$

- Gedehnte Federn

$$\begin{aligned} \text{Koordinaten:} \quad & x_j = \overline{x}_j + q_j \\ \text{Federlängen:} \quad & \ell_j = x_{j+1} - x_j \\ & = \ell_0 + (q_{j+1} - q_j) \end{aligned}$$

- Dehnung einer Feder (Auslenkung)

$$\ell_j - \ell_0 = q_{j+1} - q_j$$

Beispiel: $n = 3$

Auf jeden Massenpunkt der Masse m üben seine beiden Nachbarn elastische Kräfte aus, wobei die Oszillatoren an den beiden Enden der Kette nur einen Nachbarn haben. Wenn alle Federn gedehnt sind, haben wir nach dem Hookeschen Gesetz

$$m\ddot{q}_1 = \quad k(q_2 - q_1) \qquad \text{nach rechts}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_2 &= -\underset{\text{nach links}}{k(q_2 - q_1)} + \underset{\text{nach rechts}}{k(q_3 - q_2)} \\ &= \quad k(q_3 - 2q_2 + q_1) \end{aligned}$$

$$m\ddot{q}_3 = -k(q_3 - q_2) \qquad \text{nach links}\,.$$

Verallgemeinerung:

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= k(q_2 - q_1) \\ &\vdots \\ m\ddot{q}_j &= k(q_{j+1} - 2q_j + q_{j-1}) \\ &\vdots \\ m\ddot{q}_n &= k(q_{n-1} - q_n) \end{aligned}}$$

Das sind n *gekoppelte* Differentialgleichungen für n Funktionen $q_j(t)$, deren Lösungen $2n$ Integrationskonstanten enthalten.
Die Frage ist nun, wie sich ein solches Differentialgleichungs-System simultan für alle Auslenkungen $q_j(t)$ lösen, also entkoppeln läßt. Wir beginnen mit dem einfachsten Fall $n = 2$.

Beispiel: $n = 2$

$$\begin{aligned} m\ddot{q}_1 &= k(q_2 - q_1) \\ m\ddot{q}_2 &= k(q_1 - q_2) \end{aligned}$$

In diesem Fall ist die Entkopplung leicht zu „erraten“:

Addition:

$$m(\ddot{q}_1 + \ddot{q}_2) = 0 \quad \text{mit der Lösung} \quad q_1 + q_2 = At + B$$

Subtraktion:

$$m(\ddot{q}_1 - \ddot{q}_2) = -2k(q_1 - q_2) \quad \text{mit der Lösung} \quad q_1 - q_2 = C\cos\omega t + D\sin\omega t$$

Die erste Lösung beschreibt eine geradlinig-gleichförmige Bewegung, die zweite harmonische Schwingungen mit der Frequenz

$$\omega^2 = \frac{2k}{m}\,.$$

Die beiden Lösungen bilden ein algebraisches Gleichungssystem für q_1 und q_2. Die Auslenkungen sind

$$\begin{aligned} q_1 &= \frac{1}{2}(At + B + C\cos\omega t + D\sin\omega t) \\ q_2 &= \frac{1}{2}(At + B - C\cos\omega t - D\sin\omega t)\,. \end{aligned}$$

Die Interpretation der *Anfangsbedingungen*

$$q_1(0) = q_2(0) = 0\,, \quad \dot{q}_1(0) = v_0 \quad \text{und} \quad \dot{q}_2(0) = 0$$

bedeutet eine ruhende, entspannte Kette, die von links angeschlagen wird. Die Integrationskonstanten ergeben sich zu

$$B = C = 0\,, \quad A = v_0\,, \quad \text{und} \quad D = \frac{v_0}{\omega}\,.$$

Damit sind die Lösungen des Differentialgleichungs-Systems, passend zu diesen Anfangsbedingungen,

$$\begin{aligned} x_1 &= \ \ \ell_0 + q_1 = \ \ \ell_0 + \frac{v_0}{2}t + \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t \\ x_2 &= 2\ell_0 + q_1 = 2\ell_0 + \frac{v_0}{2}t - \frac{v_0}{2\omega}\sin\omega t\,. \end{aligned}$$

Die jeweils ersten Summanden bezeichnen die Ruhelagen, die zweiten eine geradlinig-gleichförmige Translation der ganzen Kette und die dritten harmonische Schwingungen

$$\bullet\!\!\longrightarrow \quad \longleftarrow\!\!\bullet \qquad \text{oder} \qquad \longleftarrow\!\!\bullet \quad \bullet\!\!\longrightarrow$$

mit gleichen Amplituden und Frequenzen für jede Auslenkung q_1, q_2.

Während für $n = 3$ ist dieses Verfahren noch überschaubar sein dürfte, entsteht die Frage nach einer Strategie für große n.

Dazu behandeln wir noch einmal, aber mit einem anderen Blick, das
Beispiel: $n = 2$.

Wir machen den *Synchronansatz*

$$q_1 = a_1 \cos\omega t\,, \qquad q_2 = a_2 \cos\omega t$$

mit der *synchronen* Schwingung beider Massen (gleiche Frequenz ω). Das ist vorerst eine spezielle Lösung.

Einsetzen in das Differentialgleichungssystem ergibt das algebraische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -a_1 m\omega^2 &= k(a_2 - a_1) \\ -a_2 m\omega^2 &= k(a_1 - a_2) \end{aligned}$$

für die Unbekannten a_1, a_2. Mit der Abkürzung

$$\kappa \equiv \frac{m\omega^2}{k}$$

erhalten wir das homogene algebraische Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (1-\kappa)a_1 - a_2 &= 0 \\ -a_1 + (1-\kappa)a_2 &= 0\,. \end{aligned}$$

Seine Lösbarkeitsbedingung ist das Verschwinden der Koeffizientendeterminante

$$\begin{vmatrix} 1-\kappa & -1 \\ -1 & 1-\kappa \end{vmatrix} = 0\,,$$

die man auch als *Säkular-Determinante* bezeichnet. Deren Ausrechnung ergibt die *charakteristische Gleichung*

$$(1-\kappa)^2 - 1 = 0$$

mit den Lösungen (*Eigenfrequenzen*)

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= 0 \quad \text{entsprechend} \quad \omega_1 = 0 \\ \kappa_2 &= 2 \quad \text{entsprechend} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}\,. \end{aligned}$$

Die Lösungen des Gleichungssystems sind

$$\begin{aligned} &\text{für} \quad \kappa_1 = 0 \;: \quad a_1 = a_2 \\ &\text{für} \quad \kappa_2 = 2 \;: \quad a_1 = -a_2\,. \end{aligned}$$

Wir fassen diese Lösungen als Komponenten von (i. A. n-dimensionalen) Vektoren auf und normieren diese Vektoren. Letzteres bedeutet hier

$$a_1^2 = a_2^2 \quad \text{und} \quad a_1^2 + a_2^2 = 1 \quad \longrightarrow \quad a_1^2 = a_2^2 = \frac{1}{2}\,.$$

Wir erhalten so die Einheitsvektoren

$$\vec{e}^{\,(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}^{\,(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

welche die *Normalschwingungen* des Systems beschreiben:

$$\vec{e}^{\,(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$  (Translation, $\omega_1 = 0$)

$$\vec{e}^{\,(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$  (Schwingung, $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$)

Die *allgemeine* Lösung aus dem Synchron-Ansatz ist mit vier Integrationskonstanten

$$\begin{aligned} q_1 &= e_1^{(1)} \left(A_1 \cos \omega_1 t + \frac{B_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + e_1^{(2)} (A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t) \\ q_2 &= e_2^{(1)} \left(A_1 \cos \omega_1 t + \frac{B_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t \right) + e_2^{(2)} (A_2 \cos \omega_2 t + B_2 \sin \omega_2 t)\,. \end{aligned}$$

In Worten:

Die Auslenkungen $q_j(t)$ der einzelnen Massenpunkte sind *Linearkombinationen der Normalschwingungen*.

Wir haben anstelle der Konstante B_1 die Konstante $\frac{B_1}{\omega_1}$ geschrieben, da $\omega_1 = 0$ ist und

$$\frac{B_1}{\omega_1} \sin \omega_1 t = B_1 t \frac{\sin \omega t}{\omega t} \xrightarrow{\omega_1 \to 0} B_1 t$$

gilt [1]. Mit den Komponenten der Einheitsvektoren erhalten wir schließlich für die Auslenkungen

$$
\begin{aligned}
q_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + B_1 t) + \frac{1}{\sqrt{2}}(A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t) \\
q_2 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_1 + B_1 t) - \frac{1}{\sqrt{2}}(A_2 \cos\omega_2 t + B_2 \sin\omega_2 t),
\end{aligned}
$$

was bis auf die Bezeichnung der Konstanten mit dem zuerst gefundenen Resultat übereinstimmt.

Wir schließen diesen Abschnitt ab, indem wir zu unserem Anfangs-Beispiel $n = 3$ zurückkehren und die einzelnen Schritte angeben, die nach dem Synchronansatz zu gehen sind.

- 1. Schritt: Das zu lösende Differentialgleichungs-System ist

$$
\begin{aligned}
m\ddot{q}_1 &= k(q_2 - q_1) \\
m\ddot{q}_2 &= k(q_3 - 2q_2 + q_1) \\
m\ddot{q}_3 &= k(q_2 - q_3).
\end{aligned}
$$

- 2.Schritt: Der Synchronansatz $q_j = a_j \cos\omega t \; (j = 1, 2, 3)$ führt mit $\kappa \equiv \frac{m\omega^2}{k}$ auf das algebraische Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
(1-\kappa)a_1 - a_2 &= 0 \\
-a_1 + (2-\kappa)a_2 - a_3 &= 0 \\
-a_2 + (1-\kappa)a_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

- 3. Schritt: Die Forderung

$$
\begin{vmatrix} 1-\kappa & -1 & 0 \\ -1 & 2-\kappa & -1 \\ 0 & -1 & 1-\kappa \end{vmatrix} \overset{!}{=} 0
$$

  nach dem Verschwinden der Koeffizienten-Determinante (Säkular-Determinante) führt auf die charakteristische Gleichung

$$
\kappa(1-\kappa)(\kappa-3) = 0.
$$

  Deren Lösungen sind

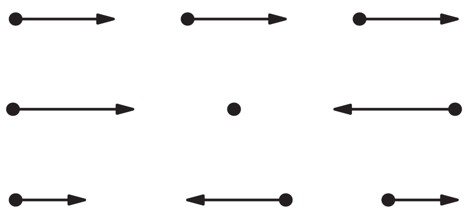
$$
\begin{aligned}
\kappa_1 &= 0 \quad \text{entsprechend} \quad \omega_1 = 0 \\
\kappa_2 &= 1 \quad \text{entsprechend} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\
\kappa_3 &= 3 \quad \text{entsprechend} \quad \omega_3 = \sqrt{3\frac{k}{m}}.
\end{aligned}
$$

[1]Wir haben erneut den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ erzeugt.

- <u>4. Schritt</u>: Wir lösen das algebraisches Gleichungssystem mit den Unbekannten a_1, a_2 und a_3 für jeden Wert κ (Cramersche Regel, Sarrussche Regel oder Entwicklung der Determinante nach einer Zeile oder Spalte) und finden die *Einheitsvektoren*

$$\vec{e}^{\,(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^{\,(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}^{\,(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

  Diesen entsprechen der Reihe nach die Normalschwingungen



(Translation, $\omega_1 = 0$)

(Schwingung, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m}}$)

(Schwingung, $\omega_3 = \sqrt{3\frac{k}{m}}$)

  Daraus lassen sich auch die Normalkoordinaten ablesen, in denen das ursprüngliche Differentialgleichungs-System entkoppelt: $q_1 + q_2 + q_3$, $q_1 - q_3$, $q_1 - 2q_2 + q_3$.

  Für große Anzahlen n von Oszillatoren lassen sich die Gleichungssysteme (Determinanten) mit gruppentheoretischen Methoden vereinfachen.

- <u>5. Schritt</u>: Linearkombination der Normalschwingungen und Einarbeitung von Anfangsbedingungen wie im Beispiel $n = 2$.

13.2 Zusätzlicher Inhalt: Zusammenhang mit Begriffen der Algebra

- Wir schreiben die charakteristische Gleichung als

$$|\mathbb{H} - \kappa \cdot \mathbb{I}| \equiv \det(\mathbb{H} - \kappa \cdot \mathbb{I}) = 0$$

  mit $\mathbb{I}$ als Einheitsmatrix und $\mathbb{H}$ als der *symmetrischen* Matrix (hier für $n = 2$ und $n = 3$)

$$\mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \mathbb{H} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

  Für $n = 2$ gilt mit den Einheitsvektoren

$$\vec{e}^{\,(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}^{\,(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H}\vec{e}^{\,(1)} = 0 \cdot \vec{e}^{\,(1)} \quad \text{und} \quad \mathbb{H}\vec{e}^{\,(2)} = 2 \cdot \vec{e}^{\,(2)},$$

  und für $n = 3$ ist mit

$$\vec{e}^{\,(1)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^{\,(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{e}^{\,(3)} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{H}\vec{e}^{\,(1)} = 0 \cdot \vec{e}^{\,(1)}, \quad \mathbb{H}\vec{e}^{\,(2)} = 1 \cdot \vec{e}^{\,(2)} \quad \text{und} \quad \mathbb{H}\vec{e}^{\,(3)} = 3 \cdot \vec{e}^{\,(3)}.$$

In beiden Fällen sind also die Einheitsvektoren $\vec{e}^{\,(j)}$ *Eigenvektoren* der Matrix $\mathbb{H}$ mit den *Eigenwerten* κ_j.

Wir stellen außerdem fest, daß jeweils für $n = 2$ und für $n = 3$ die Orthogonalitätsrelationen $\vec{e}^{\,(i)} \cdot \vec{e}^{\,(k)} = 0$ mit $i \neq k$ erfüllt sind. Allgemein gilt:

Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörigen Eigenvektoren einer symmetrischen Matrix sind orthogonal.

- Hauptachsentransformation: Wir betrachten die aus den Eigenvektoren gebildete Matrix $\mathbb{U}$, hier

$$\mathbb{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \mathbb{U} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Es ist in beiden Fällen $\mathbb{U}^\dagger\mathbb{U} = \mathbb{I}$, also ist $\mathbb{U}$ eine *orthogonale Matrix*. Da in diesem Fall die Matrixelemente reell sind, entsteht die adjungierte Matrix $\mathbb{U}^\dagger$ allein durch Transposition der Elemente.

Für $n = 2$ und für $n = 3$ ist

$$\mathbb{U}^\dagger\mathbb{H}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{beziehungsweise} \quad \mathbb{U}^\dagger\mathbb{H}\mathbb{U} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Allgemein gilt:

Zu jeder symmetrischen Matrix $\mathbb{H}$ gibt es eine orthogonale Matrix $\mathbb{U}$, sodaß $\mathbb{U}^\dagger\mathbb{H}\mathbb{U}$ diagonal ist. Die Diagonalelemente sind die Eigenwerte von $\mathbb{H}$.