Die Sonnenschein-Formel

Teil II: Anwendungen der Sonnenschein-Formel

Karl-Heinz Lotze, Jena
(2005)

Die in Teil I des Aufsatzes hergeleitete Sonnenschein-Formel wird in diesem zweiten Teil [1] benutzt, um die Entstehung der Jahreszeiten aus der Schrägstellung der Erdachse in bezug auf die Erdbahnebene zu erklären. Weitere Anwendungen sind die Zeiten des Sonnenauf- und -untergangs, die Dämmerungsdauer, Polartag und -nacht sowie die Änderung der Sonnenscheindauer von einem Tag zum anderen.

1 Einleitung

Das wichtigste Ergebnis von Teil I dieses Aufsatzes ist die Sonnenscheinformel (I.19). Mit ihrer Hilfe kann man für jede geographische Breite und jeden Zeitpunkt im Laufe eines Jahres die Höhe der Sonne über dem Horizont bestimmen.Eine erste Anwendung war die Ermittlung der Mittagshöhen der Sonne zu Beginn der Jahreszeiten.

Der Hauptinhalt dieses zweiten Teils ist die Berechnung der Sonnenenergie, die an irgendeinem Tag auf einen Quadratmeter der Erdoberfläche entfällt. Dazu muß außer der über den Tag variierenden Sonnenhöhe auch die Sonnenscheindauer bekannt sein, die auf einfache Weise ebenfalls aus der Sonnenscheinformel folgt. Wir gelangen damit zu der Kernaussage unseres Aufsatzes, daß die Ursache für die Entstehung der Jahreszeiten die Schiefe der Ekliptik, also die Schrägstellung der Erdachse in bezug auf die Erdbahnebene, ist.

Sozusagen nebenbei läßt sich eine Reihe von Eigenschaften des Sonnenscheins ableiten, die zwar mit den Jahreszeiten variieren, sich aber z.T. der Beobachtung weniger aufdrängen als die Jahreszeiten selbst. Es sind dies die Änderung der Tageslänge und wann diese am schnellsten erfolgt sowie die bürgerliche und astronomische Dämmerung. Die Polarregionen mit ihrer Erscheinung der Mitternachtssonne verdienen besondere Beachtung, und auch der Vergleich der Verhältnisse dort und am Erdäquator ist mitunter sehr instruktiv.

Auch für manche der hier vorgestellten Anwendungen der Sonnenschein-Formel war [3] eine inspirierende Quelle (Bd. 1, S. 300 ff.; Bd. 2, S. 449 ff.). Die Sonnenschein- und

[1] Veröffentlicht in [1] und [2]. Geringfügig überarbeitet 2024.

Sonnenuntergangsformeln sind allgemein genug, um weitere interessante Anwendungen zu ermöglichen, welche wir dem interessierten Leser überlassen wollen. Gemeint ist eine vergleichende Betrachtung der Jahreszeiten auf allen Planeten des Sonnensystems, für die sich die Dauern von Jahr und Tag sowie die Neigungen der Rotationsachsen gegen die jeweilige Bahnebene von den entsprechenden Größen für die Erde unterscheiden.

2 Sonnenuntergang und Sonnenscheindauer

Der Sonnenuntergang erfolge τ_u Stunden nach dem Mittag des Tages n. Dabei ist $h = 0$, und die Sonnenscheinformel (I.19) ergibt

$$\cos \frac{2\pi\tau_u}{24\,\mathrm{h}} = -\tan\varphi \cdot \frac{\sin\varepsilon \cdot \cos\nu}{\sqrt{1-\sin^2\varepsilon \cdot \cos^2\nu}}\,, \tag{1}$$

worin

$$\nu \equiv \frac{2\pi n}{365}$$

die in (I.16) definierte Abkürzung ist. Aus diesem Ergebnis, das wir fortan *Sonnenuntergangsformel* nennen wollen, können wir die Zeit $(12\,\mathrm{h} + \tau_u)$ des Sonnenuntergangs berechnen. Es läßt sich aber auch als eine Methode zur Bestimmung der geographischen Breite aus der Zeit des Sonnenuntergangs an einem bestimmten Tag lesen.

Neben τ_u ist nun auch $-\tau_u$ eine Lösung der Gleichung (1). Diese zweite Lösung beschreibt den Sonnenaufgang zur Zeit $(12\,\mathrm{h} - \tau_u)$. Dementsprechend ist die Sonnenscheindauer durch $2\tau_u$ gegeben, und die Sonnenuntergangsformel gibt implizit die Tageslänge als Funktion der Jahreszeit und der geographischen Breite an. Wir betrachten einige Beispiele.

Zu *Frühlings-* und *Herbstanfang* ist $\nu = 0$, so daß unabhängig von der geographischen Breite φ

$$\frac{2\pi\tau_u}{24\,\mathrm{h}} = \frac{\pi}{2}$$

und also $\tau_u = 6\,\mathrm{h}$ ist. (Die Lösung $\frac{3}{2}\pi$ scheidet aus, da τ_u nicht größer als 12 h sein kann.) Damit beträgt die Sonnenscheindauer $2\tau_u = 12\,\mathrm{h} = \frac{1}{2}T_\odot$, wir haben also *Tag- und Nachtgleiche*. Wir ersehen aus der Sonnenscheinformel weiter, daß am Äquator ($\varphi = 0$) unabhängig von der Jahreszeit Tag und Nacht stets gleich lang sind. Und schließlich: Stünde die Erdachse auf der Erdbahn senkrecht ($\varepsilon = 0$), wären an jedem Tag des Jahres und für jede geographische Breite Tag und Nacht gleich lang. Die unterschiedlichen Längen von Tag und Nacht sind also ursächlich mit der Schiefe der Ekliptik verbunden.

Zu *Sommer-* und *Winteranfang* ist $\cos\nu = \pm 1$, wobei das obere Vorzeichen für den Sommeranfang gilt, und wir erhalten aus (1)

$$\cos \frac{2\pi\tau_u}{24\,\mathrm{h}} = \mp \tan\varphi \cdot \tan\varepsilon\,.$$

Daraus folgt für die geographische Breite $\varphi = 51^\circ$ die Sonnenscheindauer von 16 h 19,2 m zu Sommeranfang, dagegen eine von nur 7 h 40,8 m für den Winteranfang.

Wir wissen aus Erfahrung, daß dies die beiden Extremwerte im Laufe eines Jahres sind. Daß dies so ist, folgt natürlich auch aus (1), wenn wir τ_u als Funktion von n auffassen und fragen, für welche n diese Funktion ihre Extremwerte hat. Nach Anwendung der Quotienten- und Kettenregel der Differentialrechnung erhalten wir mit Hilfe von (1)

$$\frac{\mathrm{d}\tau_u}{\mathrm{d}n} = -\frac{24\,\mathrm{h}}{365} \frac{\tan\varphi \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\nu}{[1 - \sin^2\varepsilon \cdot \cos^2\nu] \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \cos^2\nu \cdot (1 + \tan^2\varphi)}} \,. \tag{2}$$

Die Extremwertbedingung $\dfrac{\mathrm{d}\tau_u}{\mathrm{d}n} = 0$ ist offenbar dann erfüllt, wenn $\sin\nu = 0$ gilt, also für $\nu = 0$ (Sommeranfang) und $\nu = \pi$ (Winteranfang). Die Tage im Jahreslauf, an denen die Mittagshöhe der Sonne ihre Extremwerte hat, sind auch die mit der längsten bzw. kürzesten Sonnenscheindauer.

Mit der Kenntnis der Ableitung (2) können wir nun auch die Frage beantworten, wie sich von einem Tag auf den anderen die Zeit des Sonnenuntergangs ändert. Diese Änderung ist in linearer Näherung

$$\Delta\tau_u = \frac{\mathrm{d}\tau_u}{\mathrm{d}n} \cdot \Delta n \,,$$

wobei wir $\Delta n = 1$ setzen. Das Vorzeichen der Ableitung (2) wird durch das von $\sin\nu$ bestimmt, denn für die Nordhalbkugel der Erde ist $\tan\varphi > 0$. Im Intervall $0 \leq \nu \leq \pi$, d.i. von Sommer- bis Winteranfang, ist $\sin\nu \geq 0$ und $\dfrac{\mathrm{d}\tau_u}{\mathrm{d}n} \leq 0$. Damit ist auch $\Delta\tau_u \leq 0$, die Tage werden also kürzer. Von Winter- bis Sommeranfang ist dagegen $\Delta\tau_u \geq 0$, die Tage werden länger. Am Äquator ($\varphi = 0$) ist unabhängig von der Jahreszeit $\Delta\tau_u = 0$, d.h. alle Tage sind, wie wir bereits wissen, gleich lang.

Nun fragen wir noch, an welchen Tagen des Jahres die Tage am schnellsten länger oder kürzer werden, wann also die durch (2) gegebene Funktion von n ihre Extremwerte hat. Eine etwas längere Rechnung zeigt, daß die Bedingung $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\left(\dfrac{\mathrm{d}\tau_u}{\mathrm{d}n}\right) = 0$ dann erfüllt ist, wenn $\cos\nu = 0$ gilt, also zu Herbst- und Frühlingsanfang. Dann ist $\sin\nu = \pm 1$, wobei das obere Vorzeichen für den Herbstanfang gilt, und (2) vereinfacht sich zu

$$\frac{\mathrm{d}\tau_u}{\mathrm{d}n} = \mp\frac{24\,\mathrm{h}}{365} \tan\varphi \cdot \sin\varepsilon \,. \tag{3}$$

Für die geographische Breite $\varphi = 51°$ wird zu Herbstanfang die Tageslänge von einem Tag zum anderen um 1 m 56 s kürzer und zu Frühlingsanfang um den gleichen Betrag länger.

Hinsichtlich der Sonnenscheindauer verdienen die *Polarregionen* eine besondere Beachtung. An einem Polartag geht die Sonne nicht unter. Mit $\tau_u = 12\,\mathrm{h}$, also $\cos\dfrac{2\pi\tau_u}{24\,\mathrm{h}} = -1$, erhalten wir aus der Sonnenuntergangsformel (1)

$$\cos\nu = \frac{\cos\varphi}{\sin\varepsilon} \,. \tag{4}$$

Da die linke Seite nicht größer als eins werden kann, kann der Polartag nur in solchen geographischen Breiten auftreten, die der Bedingung $\cos\varphi \leq \sin\varepsilon$ genügen. Diese Bedingung wird für $\varphi \geq (90^\circ - \varepsilon)$ erfüllt (Abb. 1). Die gleiche Bedingung resultiert auch direkt aus der Sonnenscheinformel (I.18), wenn wir nach der *Mitternachtshöhe* ($\tau = 12\,\mathrm{h}$) zu Sommeranfang ($n = 0$) fragen. Sie ergibt sich zu

$$h = |\varepsilon + \varphi| - 90^\circ\,.$$

Auf der Nordhalbkugel ist diese nur positiv (Mitternachtssonne) für geographische Breiten $\varphi \geq (90^\circ - \varepsilon)$. Für die Südhalbkugel gilt das Entsprechende. Erwartungsgemäß wird also die Breite der Polarregionen durch die Schiefe der Ekliptik bestimmt. Am *nördli-*

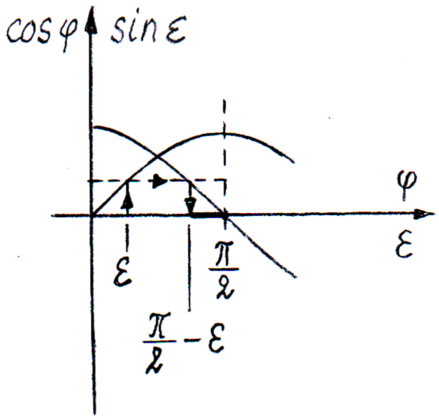

Abbildung 1: Zur Erfüllung der Bedingung $\cos\varphi \leq \sin\varepsilon$.

chen Polarkreis ist $\varphi = (90^\circ - \varepsilon)$ und also $\cos\varphi = \sin\varepsilon$. Damit geht (4) in $\cos\nu = 1$ über. Die Lösung $n = 0$ beschreibt den Tag des Sommeranfangs. Formulieren wir mit der Sonnenscheinformel (I.19) selbst die Bedingung, daß sich die Sonne über dem Horizont befindet ($\sin h \geq 0$), lautet sie *für diese geographische Breite*

$$\cos\varepsilon \cdot \cos\nu + \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \cos^2\nu} \cdot \cos\frac{2\pi\tau}{24\,\mathrm{h}} \geq 0\,.$$

Für $n = 0$ reduziert sie sich auf $\cos\dfrac{2\pi\tau}{24\mathrm{h}} \geq -1$, was unabhängig von τ, also für den ganzen Tag erfüllt ist. An allen anderen Tagen ergeben sich Einschränkungen für die Tageszeit. Am nördlichen Polarkreis dauert der Polartag also einen Tag. Die Höhe der Sonne zu Mittag ($\tau = 0$) beträgt an diesem Tag nach (I.19) $\sin h = 2\sin\varepsilon\cos\varepsilon = \sin 2\varepsilon$, also $h = 2\varepsilon = 47^\circ$ (Abb. 2). Um Mitternacht berührt die Sonne den Horizont, denn wir haben für $\tau = 12\,\mathrm{h}$ die Sonnenhöhe $h = 0$. Schreiten wir, vom nördlichen Polarkreis ausgehend, weiter in Richtung Norden, dauert der Polartag länger als einen Tag. Für das Nordkap mit seiner geographischen Breite $\varphi = 71^\circ$ erhalten wir aus (4)

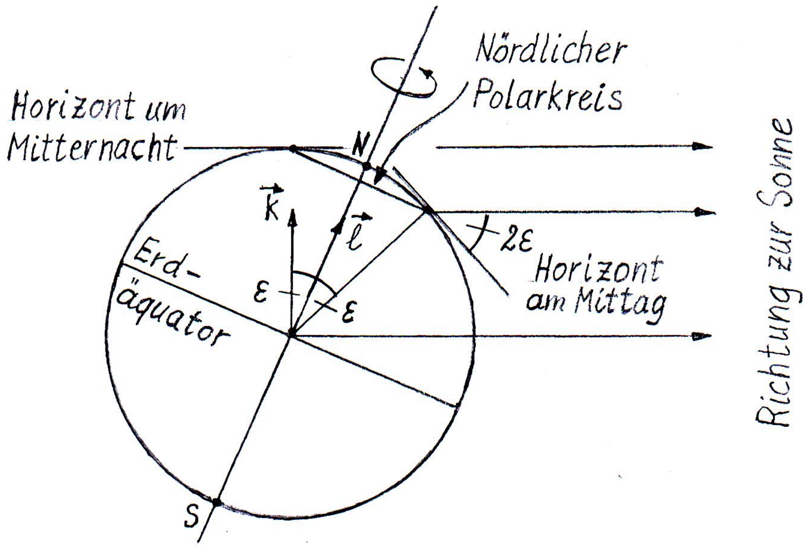

Abbildung 2: Die Sonnenhöhe am nördlichen Polarkreis zu Sommeranfang mittags und um Mitternacht.

$n = 35{,}7$, so daß dort der Polartag $2n = 71{,}4$ Tage dauert. Die Mitternachtshöhe der Sonne beträgt zu Sommeranfang $h = 4{,}5°$ (Abb. 3). Am *Nordpol* ist schließlich $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $\cos\varphi = 0$. Für diesen Fall reduziert sich die Bedingung $\sin h \geq 0$ mit (I.18) einfach auf $\cos\nu \geq 0$. Sie ist unabhängig von der Tageszeit von Frühlings- bis Herbstanfang erfüllt; der Polartag dauert am Nordpol ein halbes Jahr (Abb. 4). Das gleiche Resultat ergibt sich auch aus (4). Die linke Seite von (4) wird mit $\cos\varphi$ für $\nu = \dfrac{\pi}{2}$, also $2n = \dfrac{365}{2}$ gleich Null, d.i. für ein halbes Jahr, dessen Tage symmetrisch zum Sommeranfang liegen. Ihre größte Höhe erreicht die Sonne zu Sommeranfang ($n = 0$), nämlich $h = \varepsilon = 23{,}5°$ (Abb. 5). Wegen $\tan\frac{\pi}{2} = \pm\infty$ erfolgt der Übergang von der Polarnacht zum Polartag zu Frühlingsanfang (und umgekehrt zu Herbstanfang) gemäß (3) sprunghaft. Im Gegensatz zu den realen Verhältnissen haben wir jedoch mit einer punktförmigen Sonne gerechnet und auch atmosphärische Einflüsse (Lichtstreuung und Strahlenbrechung) unbeachtet gelassen.

3 Die Jahreszeiten

Wir wenden uns nun der Erklärung der Jahreszeiten im eigentlichen Sinne zu. Bisher haben wir mit diesem Begriff die Anzahl n der seit Sommeranfang vergangenen Tage bezeichnet. Nun fragen wir nach der im Verlaufe des Tages n von einem Quadratmeter der Erdoberfläche empfangenen Gesamtenergie E. Dafür ist entscheidend, welche Fläche F_2 von einem Lichtbündel mit dem Querschnitt F_1 ausgeleuchtet wird (Abb. 6).

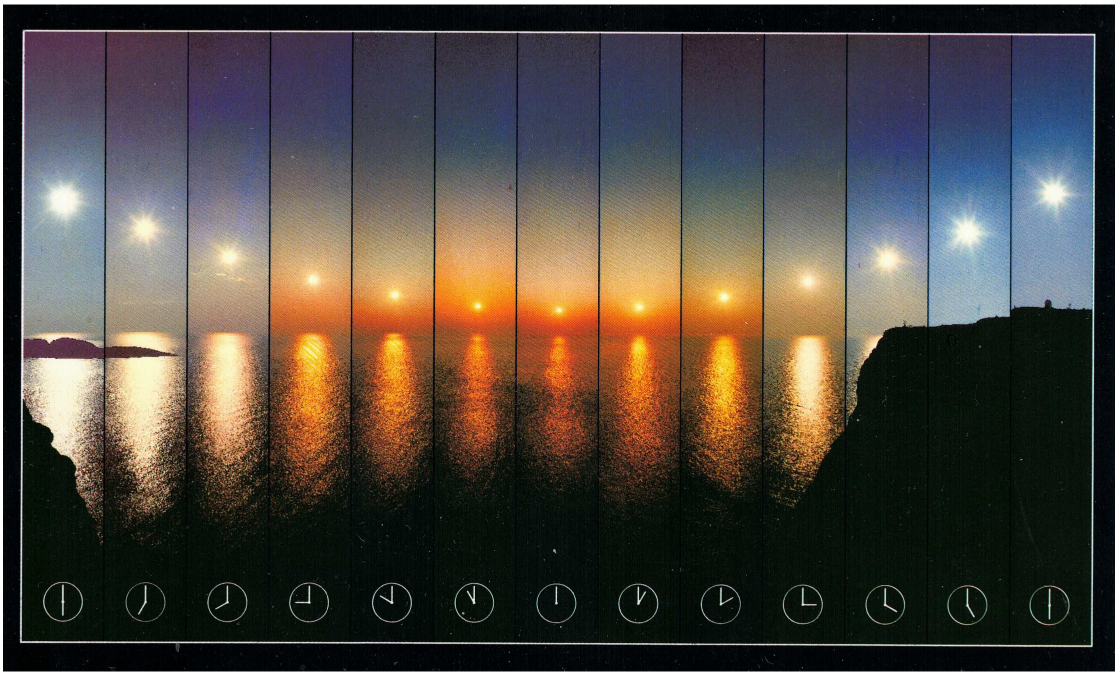

Abbildung 3: Die Mitternachtssonne zu Sommeranfang am Nordkap.

Die pro Zeiteinheit durch einen Quadratmeter der Fläche F_1 hindurchtretende Sonnenenergie, also die Energiestromdichte oder Bestrahlungsstärke, bezeichnet man als *Solarkonstante*. Sie hat außerhalb der Erdatmosphäre den Wert $S_1 = 1{,}37\,\frac{\mathrm{kW}}{\mathrm{m}^2}$. Aus Gründen der Energieerhaltung ist $S_1F_1 = S_2F_2$, also mit Abb. 6

$$S_2 = S_1\frac{F_1}{F_2} = S_1 \cdot \sin h.$$

Die Energiestromdichte S_2 ist demnach maximal, wenn die Sonne ihren Höchststand erreicht und Null bei Sonnenauf- und -untergang.

Die gesuchte Gesamtenergie pro Quadratmeter im Laufe des Tages n (auch „Bestrahlung“ genannt) ist damit

$$E = S_1 \int_{\tau_a(n)}^{\tau_u(n)} \sin h \; \mathrm{d}\tau\,. \tag{5}$$

Dabei ist $\sin h$ durch die Sonnenscheinformel (I.18) und die Zeit $\tau_u(n)$ des Sonnenuntergangs durch die Sonnenuntergangsformel (1) gegeben. Wie bereits bemerkt, gilt für die Zeit des Sonnenaufgangs $\tau_a = -\tau_u$. Für einen bestimmten Tag (n fest) ist der erste Summand in (I.18) konstant und der zweite zeigt eine Cosinus-Abhängigkeit von der Tageszeit τ. Damit ist die Integration elementar ausführbar. Sie führt zunächst auf

$$E = 2S_1\left[\sin\varepsilon\cdot\cos\nu\cdot\sin\varphi\cdot\tau_u + \cos\varphi\cdot\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cdot\cos^2\nu}\cdot\frac{24\,\mathrm{h}}{2\pi}\cdot\sin\frac{2\pi\tau_u}{24\,\mathrm{h}}\right].$$

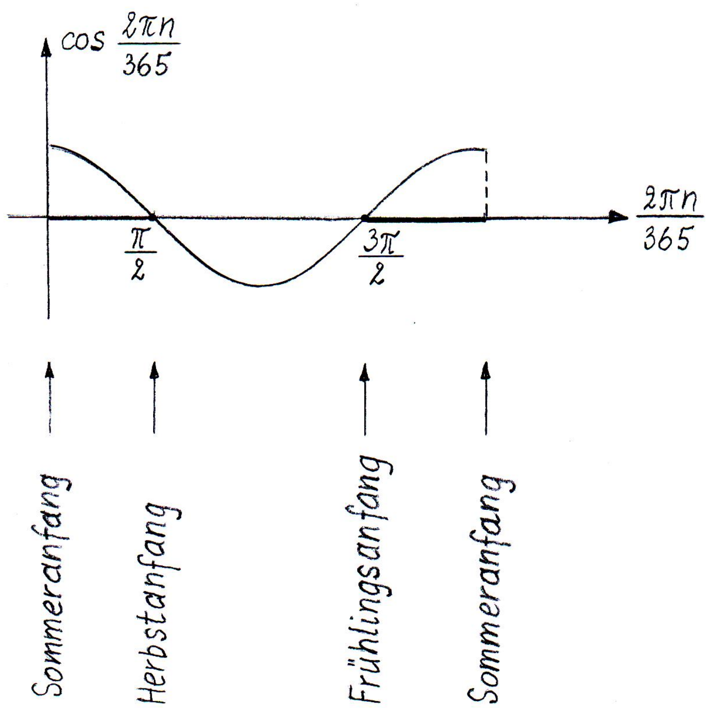

Abbildung 4: Zur Dauer des Polartages am Nordpol.

Nun ersetzen wir noch die Sinus-Abhängigkeit von τ_u durch eine Cosinus-Abhängigkeit, welche durch (1) gegeben ist, und erhalten als Endergebnis

$$E = 2S_1 \left[\sin\varepsilon \cdot \cos\nu \cdot \sin\varphi \cdot \tau_u + \frac{24\,\mathrm{h}}{2\pi} \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cos^2\nu \cdot (1 + \tan^2\varphi)} \right] . \quad (6)$$

Die wichtigste Eigenschaft dieses Resultats wollen wir sogleich nennen: Stünde die Erdachse auf der Erdbahnebene senkrecht ($\varepsilon = 0$), bliebe von (6)

$$E = S_1 \cdot \frac{24\,\mathrm{h}}{\pi} \cos\varphi \, .$$

Die Energie pro Quadratmeter hinge nur von der geographischen Breite ab, und einen Wechsel der Jahreszeiten gäbe es nicht. Die Ursache für die Entstehung der Jahreszeiten ist demnach die Schiefe der Ekliptik, also die Schrägstellung der Erdachse in bezug auf die Erdbahnebene. Zwar geht auch die Tageslänge in das Ergebnis (6) ein, aber auch diese ist, wie wir erkannt haben, nur deshalb von Tag zu Tag verschieden, weil die Erdachse gegen die Erdbahnebene geneigt ist.

Wir vergleichen nun bei gegebener Neigung der Erdachse die zu Sommer- bzw. Winteranfang während eines ganzen Tages auf einen Quadratmeter entfallende Gesamtenergie.

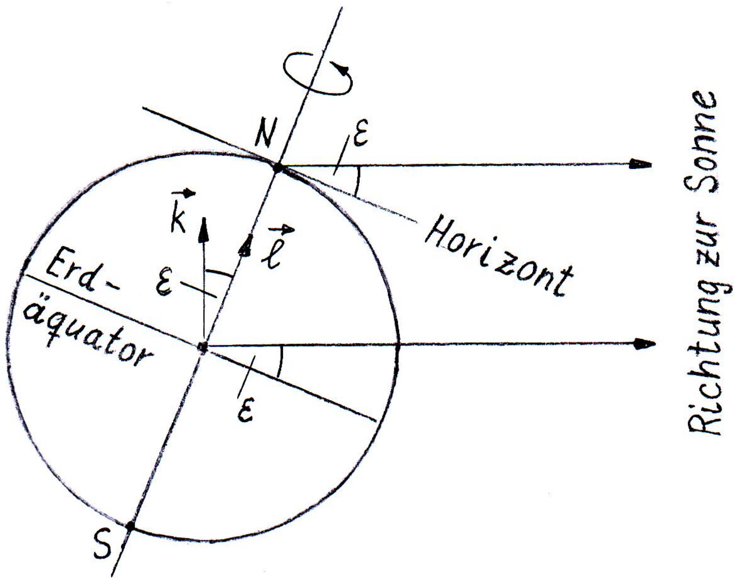

Abbildung 5: Die größte Höhe, die die Sonne zu Sommeranfang am Nordpol erreicht, ist gleich der Schiefe der Ekliptik.

Als geographische Breite wählen wir $\varphi = 51°$. Für $\cos\nu = \pm 1$, wobei das obere Vorzeichen für den Sommeranfang gilt, erhalten wir aus (6)

$$E = 2S_1 \left[\pm \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi \cdot \tau_u + \frac{24\,\mathrm{h}}{2\pi} \cdot \cos\varphi \cdot \sqrt{\cos^2\varepsilon - \sin^2\varepsilon \cdot \tan^2\varphi} \right] . \tag{7}$$

Dabei ist bei Verwendung des oberen Vorzeichens $\tau_u = 8{,}16\,\mathrm{h}$ und bei Verwendung des unteren $\tau_u = 3{,}84\,\mathrm{h}$ einzusetzen (siehe Abschn. 2). Das Resultat ist für den Sommeranfang $E_\mathrm{S} = 12{,}03\,\frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{m}^2}$ und für den Winteranfang $E_\mathrm{W} = 1{,}84\,\frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{m}^2}$, so daß also in unserer geographischen Breite zu Sommeranfang im Vergleich zum Winteranfang etwa der 6,5-fache Energiebetrag im Laufe eines Tages auf den Quadratmeter kommt (siehe auch Abb. 7).

Ein Ort in der Polarregion ($\varphi \geq 90° - \varepsilon$) erhält an einem Tag n, an dem die Sonne nicht untergeht ($\tau_u = 12\mathrm{h}$) pro Quadratmeter die Gesamtenergie

$$E = S_1 \cdot 24\,\mathrm{h} \cdot \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi \cdot \cos\nu\,. \tag{8}$$

Für den nördlichen Polarkreis ($\varphi = 90° - \varepsilon$) ist der einzige derartige Tag der des Sommeranfangs ($n = 0$), so daß wir aus (8)

$$E_{\mathrm{PK,S}} = S_1 \cdot 12\,\mathrm{h} \cdot \sin 2\varepsilon = 12{,}02\,\frac{\mathrm{kWh}}{\mathrm{m}^2}$$

erhalten. Instruktiv und wohl auch überraschend ist der Vergleich dieses Ergebnisses mit

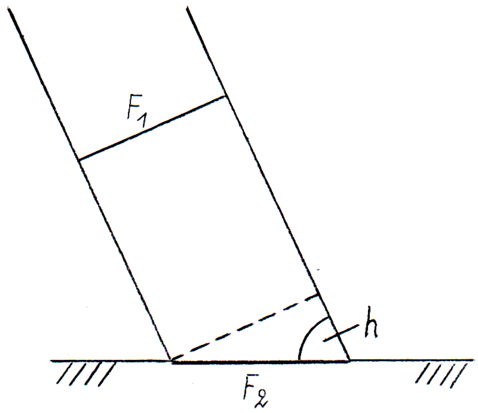

Abbildung 6: Die Ausleuchtung der Fläche F_2 durch ein Lichtbündel vom Querschnitt F_1.

den Verhältnissen am Erdäquator. Mit $n = 0$ und $\varphi = 0$ folgt aus (7) unmittelbar

$$E_{\text{Ä,S}} = S_1 \cdot \frac{24\,\text{h}}{\pi} \cdot \cos\varepsilon = 9{,}6\,\frac{\text{kWh}}{\text{m}^2}\,. \tag{9}$$

Wegen der längeren Sonnenscheindauer erhält zu Sommeranfang eine Fläche von einem Quadratmeter am nördlichen Polarkreis genau so viel Energie wie in unserer geographischen Breite und etwa 1,25mal so viel wie am Äquator! Natürlich müssen wir hier betonen, daß unsere Betrachtungen nur die geometrischen Verhältnisse zu erfassen gestatten und nicht die klimatischen und meteorologischen.

Schließlich betrachten wir noch die jahreszeitlichen Änderungen am Äquator. Mit $\sin\varphi = 0$ verschwindet der von der Tageslänge abhängige erste Summand in (6), und es gilt das Resultat (9) nicht nur für den Sommer-, sondern auch für den Winteranfang. Das ist im Laufe des Jahres auch der niedrigste Wert, da E nur noch von der Sonnenhöhe abhängt. Diese ist zu Frühlings- und Herbstanfang maximal, und mit $\cos\nu = 0$ erhalten wir aus (6)

$$E_{\text{Ä,F}} = S_1 \cdot \frac{24\,\text{h}}{\pi}\,.$$

Bei niedrigstem Sonnenstand am Äquator (zu Sommer- und Winteranfang) entfällt also auf den Quadratmeter die Energie

$$E_{\text{Ä,S}} = E_{\text{Ä,F}} \cdot \cos\varepsilon \approx 0{,}92\,E_{\text{Ä,F}}\,,$$

das sind noch 92% des Maximalwertes.

4 Bürgerliche und astronomische Dämmerung

Bekanntlich bezeichnet man als bürgerliche Dämmerung die Zeit nach Sonnenuntergang oder vor Sonnenaufgang, während der man noch (schon) lesen und andere Arbeiten

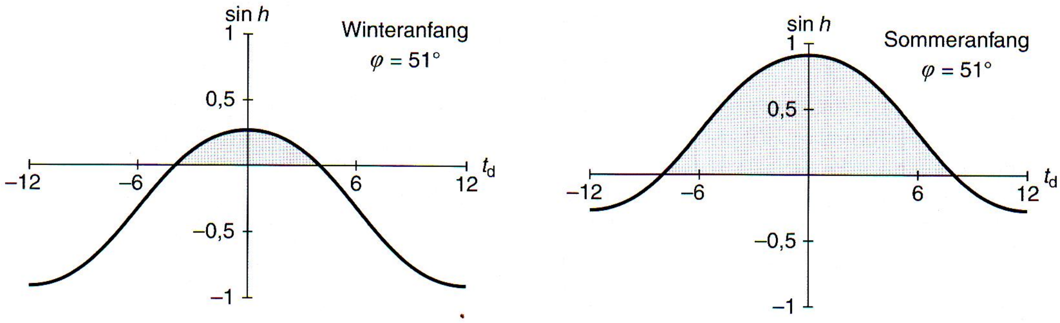

Abbildung 7: Die Größe der schraffierten Flächen ist ein Maß für die zu Winter- bzw. Sommeranfang auf einen Quadratmeter der Erdoberfläche entfallende Gesamtenergie.

verrichten kann, ohne künstliches Licht verwenden zu müssen. Um dies quantitativ zu fassen, spricht man von bürgerlicher Dämmerung solange, bis die Sonne 6° unter den Horizont gesunken ist. (Wir werden nachfolgend nur die Abenddämmerung diskutieren.)

Die astronomische Dämmerung bezeichnet die Zeit von Sonnenuntergang bis zu einer Sonnenhöhe $h = -18°$.

Die seit Mittag eines bestimmten Tages vergangene Zeit, bei der die Sonne eine bestimmte Höhe h hat, ergibt sich direkt aus der Sonnenscheinformel (I.19) zu

$$\cos\frac{2\pi\tau}{24\,\mathrm{h}} = \frac{\sin h - \sin\varphi\cdot\sin\varepsilon\cdot\cos\nu}{\cos\varphi\cdot\sqrt{1-\sin^2\varepsilon\cdot\cos^2\nu}}\,. \tag{10}$$

Für $h = 0$ ist dies die uns schon bekannte Sonnenuntergangsformel (1). Zu Beginn der vier Jahreszeiten vereinfacht sich (10) wie folgt:
Frühlings- und Herbstanfang:

$$\cos\frac{2\pi\tau}{24\,\mathrm{h}} = \frac{\sin h}{\cos\varphi}\,, \tag{11}$$

Sommer- und Winteranfang:

$$\cos\frac{2\pi\tau}{24\,\mathrm{h}} = \frac{\sin h \mp \sin\varphi\cdot\sin\varepsilon}{\cos\varphi\cdot\cos\varepsilon}\,, \tag{12}$$

wobei das obere Vorzeichen für den Sommeranfang gilt.

Wir berechnen damit die Dämmerungsdauern an diesen Tagen für die geographische Breite $\varphi = 51°$ (Abb. 8) und beginnen mit der astronomischen Dämmerung (AD). Fürden Frühlings- und Herbstanfang erhalten wir $\tau_{\mathrm{AD}} = 7{,}96\,\mathrm{h}$, so daß die Sonne um 19 h 57,6 m eine Höhe von $-18°$ erreicht. Da an beiden Tagen die Sonne um 18 h 00 m untergeht, beträgt die Dauer der astronomischen Dämmerung $\Delta\tau_{\mathrm{AD}} = 01\,\mathrm{h}\;57{,}6\,\mathrm{m}$. Entsprechend resultiert für den Winteranfang eine Dämmerungsdauer $\Delta\tau_{\mathrm{AD}} = 02\,\mathrm{h}\;09\,\mathrm{m}$, und für den Sommeranfang erhalten wir die unerfüllbare Bedingung $\cos\frac{2\pi\tau}{24\,\mathrm{h}} = -1{,}0723$.

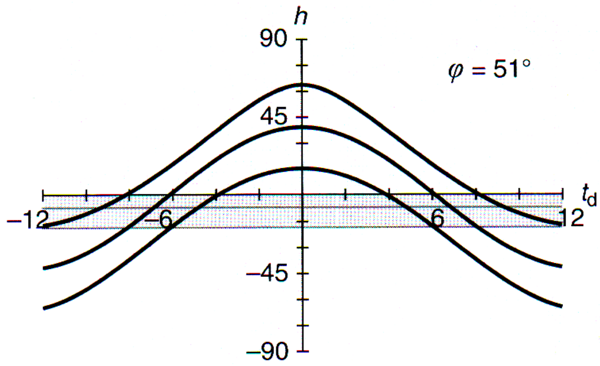

Abbildung 8: Die Sonnenhöhe im Tageslauf für die geographische Breite $\varphi = 51°$. Von oben nach unten: Sommeranfang, Frühlings- und Herbstanfang, Winteranfang. Der grau unterlegte Streifen bezeichnet die Sonnenhöhen $-6°$ und $-18°$.

Zu Sommeranfang wird es also in unserer geographischen Breite im astronomischen Sinne nicht völlig dunkel.

Für die bürgerliche Dämmerung (BD) lauten die Resultate für den Frühlings- und Herbstanfang $\Delta\tau_{\rm BD} = 38{,}4\,\rm m$, für den Winteranfang $\Delta\tau_{\rm BD} = 46{,}2\,\rm m$ und für den Sommeranfang $\Delta\tau_{\rm BD} = 54\,\rm m$. Es wird also zu Frühlings- und Herbstanfang am schnellsten dunkel, und zu Sommeranfang dauert die Dämmerung am längsten. Diese Tatsachen drängen sich der Erfahrung nicht so unmittelbar auf wie die im Laufe eines Jahres unterschiedlichen Tageslängen. Wenn man aber bewußt darauf achtet, lassen sie sich unschwer beobachten.

Wie die Verhältnisse in besonderen geographischen Breiten, etwa am Äquator, am nördlichen Wendekreis, am nördlichen Polarkreis und am Nordpol sind, mag der Leser selbst prüfen. Die Ergebnisse sind in Abb. 9 dargestellt.

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer anderen interessanten Frage: In welcher geographischen Breite wird es, in nördlicher Richtung voranschreitend, erstmals auch im bürgerlichen Sinne zu Sommeranfang nicht dunkel? Dann haben wir $\tau_{\rm BD} = 12\,\rm h$, und (12) geht mit dem oberen Vorzeichen in $\cos\varphi\cos\varepsilon - \sin\varphi\sin\varepsilon = -\sin h$ über, was sich in der Form

$$\cos(\varphi + \varepsilon) = \cos(90° + h)$$

schreiben läßt. Die gesuchte geographische Breite ist mit $h = -6°$ also

$$\varphi = 90° + h - \varepsilon = 60{,}5° \,.$$

Dies ist die geographische Breite von St. Petersburg, womit die dortigen berühmten „weißen Nächte“ auch durch unsere Sonnenscheinformel beschrieben sind.

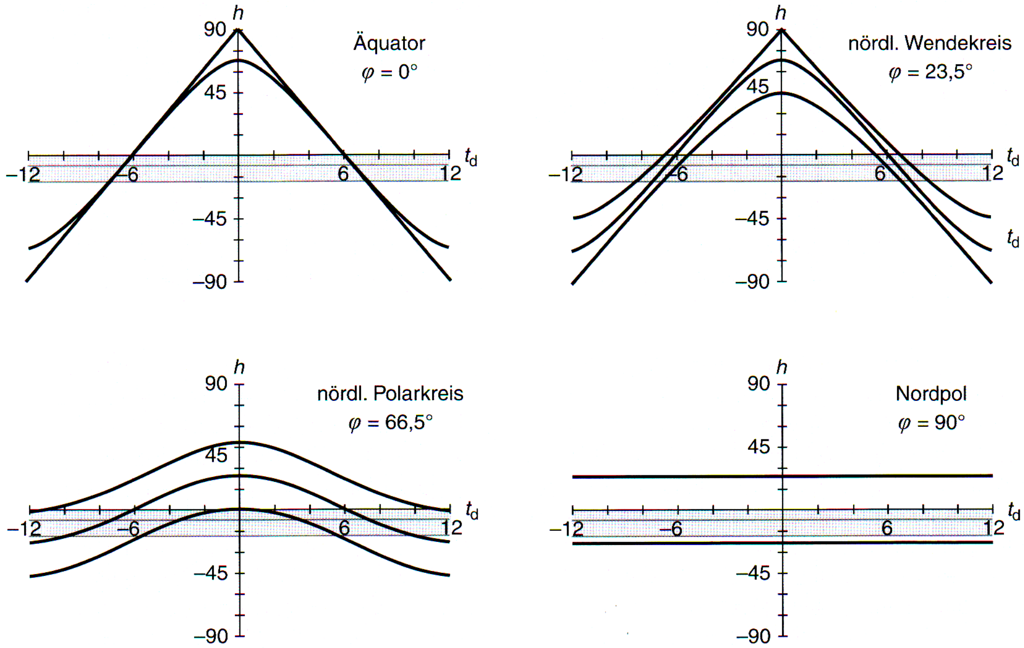

Abbildung 9: Die einzelnen Teilabbildungen entsprechen Abb. 8, jedoch für unterschiedliche geographische Breiten. Am Äquator fallen die Graphen für Sommer- und Winteranfang zusammen, und am Nordpol liegt der Graph für Frühlings- und Herbstanfang auf der Abszisse.

Literatur

[1] Lotze, K.-H.: *Die Sonnenschein-Formel – Teil II: Anwendungen der Sonnenschein-Formel.* Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 58(2005)(6)344-350

[2] Dorschner, J.; Gürtler, J.; Lotze, K.-H.; Meusinger, H.; Pfau, W.:
Astronomie – Astrophysik – Kosmologie
Bd. 11N von Kuhn, W. (Hrsg.): Handbuch der Experimentellen Physik, Sekundarbereich II; AULIS-Verlag, Köln 2011

[3] Marsden, J.; Weinstein, A.: *Calculus.* Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1985 (3 Bände)