Die Sonnenschein-Formel

Teil I: Herleitung der Sonnenschein-Formel

Karl-Heinz Lotze, Jena
(2005)

Mit den Methoden der Vektorrechnung leiten wir im ersten Teil dieses Aufsatzes [1] die „Sonnenschein-Formel“ her, die es gestattet, für jeden Zeitpunkt im Laufe eines Jahres und für jede geographische Breite die Höhe der Sonne über dem Horizont anzugeben. Eine erste Anwendung ist die Berechnung der Mittagshöhen der Sonne zu Beginn der Jahreszeiten für markante geographische Breiten.

1 Einleitung

Vorstellungen über die Entstehung der Jahreszeiten sind ein Indikator für wissenschaftliche Allgemeinbildung.

Besonders weit verbreitet ist die Fehlvorstellung, die Jahreszeiten kämen dadurch zustande, daß sich die Erde auf ihrer elliptischen Bahn im Winter am weitesten von der Sonne entfernt. In Wirklichkeit durchläuft sie aber in großer zeitlicher Nähe zum Winteranfang, nämlich am 4. Januar, den sonnennächsten Punkt ihrer Bahn und am 4. Juli den sonnenfernsten. Wer so den Unterschied zwischen Sommer und Winter erklären will, vergißt, daß er nur vom Standpunkt eines Beobachters auf der Nordhalbkugel der Erde argumentiert. Das Argument, wäre es richtig, müßte ja auch dazu taugen, die jeweils andere Jahreszeit auf der Südhalbkugel zu erklären.

Zur Ermittlung der Sonnenenergie, die an irgendeinem Tag des Jahres an einem Ort mit einer ganz bestimmten geographischen Breite auf einen Quadratmeter der Erdoberfläche entfällt, leiten wir die „Sonnenschein-Formel“ her, mit der man für jeden Zeitpunkt des Jahres die Höhe der Sonne über dem Horizont berechnen kann. Dies ist eine typische Aufgabe aus der sphärischen Trigonometrie, welche jedoch bekanntermaßen schon seit Jahrzehnten kein obligatorischer Gegenstand des Mathematikunterrichts mehr ist. Angeregt durch die Lektüre von [3] (Bd. 3, S. 754 ff.) werden wir diese Aufgabe mit Hilfe der Vektorrechnung lösen.

Die Beantwortung der Frage nach der Entstehung der Jahreszeiten steht in einem sinnvollen fächerübergreifenden Zusammenhang von Astronomie, Mathematik, Geographie

[1] Veröffentlicht in [1] und – beginnend mit Abschnitt 4 – in [2]. Geringfügig überarbeitet 2024.

und Physik. Auf mathematischer Seite werden der Umgang mit trigonometrischen Funktionen, die Vektorrechnung (Komponentenzerlegung von Vektoren, Skalar- und Vektorprodukt), die Lösung von Extremwertaufgaben und die Integration elementarer Grundfunktionen im Zusammenhang benötigt.

In diesem Teil I des Aufsatzes berechnen wir als erste einfache Anwendung der Sonnenschein-Formel die Mittagshöhen der Sonne zu Beginn der Jahreszeiten für verschiedene markante geographische Breiten. Das eigentlich angestrebte Ergebnis, nämlich die Erklärung der Jahreszeiten aus der Schrägstellung der Erdachse in bezug auf die Erdbahnebene, ist der Hauptgegenstand des Teils II. Dort wird sich auch herausstellen, daß der Anwendungsbereich der Sonnenscheinformel sehr viel größer ist. So werden wir exemplarisch für verschiedene geographische Breiten auch Sonnenauf- und -untergang, die Dämmerungsdauer, Polartag und -nacht sowie die Änderung der Sonnenscheindauer von einem Tag zum anderen behandeln.

2 Die jährliche und tägliche Bewegung der Erde

Nachfolgend beschreiben wir sowohl die jährliche Bewegung der Erde um die Sonne als auch die tägliche Drehung der Erde um ihre eigene Achse. Dabei legen wir die vereinfachende Annahme zugrunde, daß sich die Erde mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt, in deren Mittelpunkt die Sonne ruht.

Dieser Mittelpunkt sei auch der Ursprung eines rechtshändigen Koordinatensystems, das von den paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{i}, \vec{j}$ und $\vec{k}$ aufgespannt wird. Diese Vektoren werden so orientiert, daß $\vec{i}$ und $\vec{j}$ in der Ebene der Erdbahn liegen, wobei der Vektor $\vec{i}$ von der Sonne zu dem Punkt der Erdbahn zeigt, in dem sich die Erde zu Sommeranfang (21. Juni) befindet. (Wenn im folgenden von Sommer-, Herbst-, Winter- und Frühlingsanfang die Rede ist, ist der Beginn dieser Jahreszeiten auf der Nordhalbkugel der Erde gemeint.) Dann zeigt der Vektor $\vec{j}$ auf die Position der Erde zu Herbstanfang (23. September). Der Vektor $\vec{k}$ steht sowohl auf $\vec{i}$ als auch auf $\vec{j}$ und damit auf der Erdbahnebene senkrecht, so daß, von seiner Spitze aus gesehen, die Bewegung der Erde um die Sonne entgegen dem Uhrzeigersinn erfolgt (Abb. 1). Der Einheitsvektor, der zu irgendeinem Zeitpunkt von der Sonne zur Erde weist, sei der Vektor $\vec{u}(t)$. Dementsprechend ist $-\vec{u}(t)$ der Einheitsvektor, der zu diesem Zeitpunkt von der Erde zur Sonne zeigt. Unsere Zählung sei so, daß der Zeitpunkt $t = 0$ mit dem Sommeranfang auf der Nordhalbkugel zusammenfällt. Demnach ist also $\vec{u}(0) = \vec{i}$. Für irgendeinen Zeitpunkt t gilt (Abb. 2)

$$\vec{u} = \cos \omega_a t \cdot \vec{i} + \sin \omega_a t \cdot \vec{j} \tag{1}$$

mit

$$\omega_a = \frac{2\pi}{T_a}\,, \tag{2}$$

wobei $T_a = 365{,}2564\,T_\odot$ die in Sonnentagen gemessene Jahreslänge ($T_\odot = 1\,\mathrm{d}$) und ω_a die Kreisfrequenz der Bewegung der Erde um die Sonne bedeuten.

Für die Beschreibung der täglichen Drehung der Erde um ihre eigene Achse machen wir die vereinfachende Annahme, daß die Erdachse in unserem Koordinatensystem feststeht,

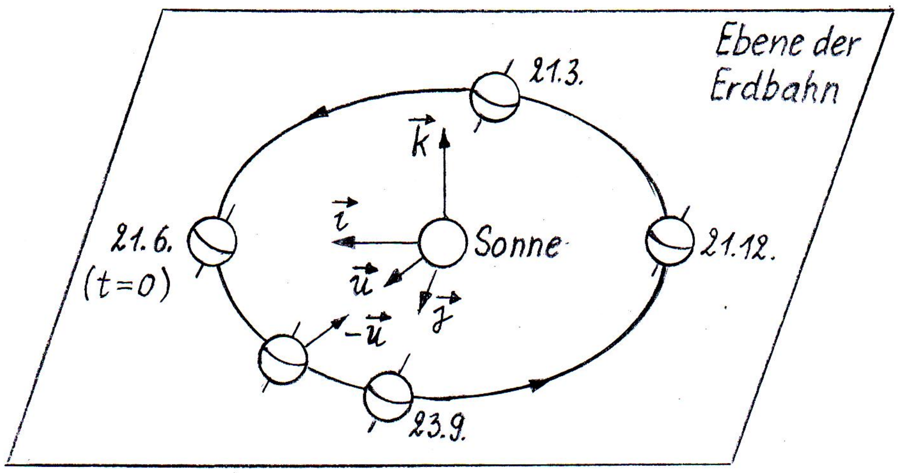

Abbildung 1: Die Bewegung der Erde um die Sonne und die Festlegung des Koordinatensystems, das von den paarweise orthogonalen Einheitsvektoren $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ und $\vec{k}$ aufgespannt wird.

d.h. wir ignorieren ihre Präzession. Der die Erdachse beschreibende, vom Erdmittelpunkt zum Nordpol zeigende Einheitsvektor sei $\vec{\ell}$. Der Winkel, den $\vec{\ell}$ mit dem senkrecht auf der Erdbahnebene stehenden Vektor $\vec{k}$ einschließt, ist $\varepsilon = 23{,}5°$, die sogenannte „Schiefe der Ekliptik". Um den zeit*un*abhängigen Vektor $\vec{\ell}$ in unserem Koordinatensystem zu beschreiben, genügt es, seine Lage in diesem Koordinatensystem zu irgendeinem Zeitpunkt zu kennen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ (Sommeranfang auf der Nordhalbkugel) liegt $\vec{\ell}$ in der von den Vektoren $\vec{\imath}$ und $\vec{k}$ aufgespannten Ebene und ist auf die Sonne zu geneigt (Abb. 3). Es ist also

$$\vec{\ell} = -\sin\varepsilon \cdot \vec{\imath} + \cos\varepsilon \cdot \vec{k}\,. \tag{3}$$

Nun sei P derjenige Punkt mit der geographischen Breite φ auf der Erdoberfläche, für den es zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade Mittag ist. Dann liegt der Einheitsvektor $\vec{r}_0$, der vom Erdmittelpunkt zu P zeigt, also die Richtung der Vertikalen in P hat, in der von $\vec{\ell}$ und $\vec{\imath}$ aufgespannten Ebene. Um $\vec{r}_0$ durch die geographische Breite zu charakterisieren, führen wir den in der Ebene des Erdäquators liegenden Einheitsvektor $\vec{m}_0$ ein. Abb. 4 entnehmen wir, daß

$$\vec{r}_0 = \cos\varphi \cdot \vec{m}_0 + \sin\varphi \cdot \vec{\ell} \tag{4}$$

gilt und daß $\vec{m}_0$ in unserem ursprünglichen Koordinatensystem die Komponentenzerlegung

$$\vec{m}_0 = -\cos\varepsilon \cdot \vec{\imath} - \sin\varepsilon \cdot \vec{k} \tag{5}$$

hat.

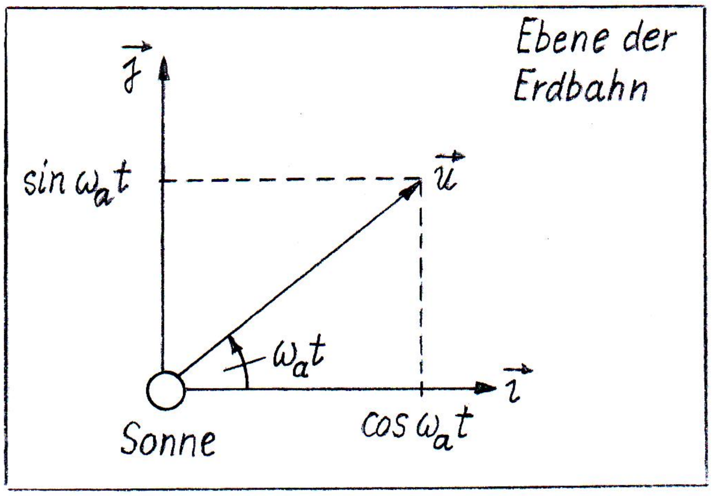

Abbildung 2: Senkrechter Blick auf die Ebene der Erdbahn. Die Position der Erde wird durch den zeitabhängigen Einheitsvektor $\vec{u}(t)$ beschrieben.

Um die Drehung der Erde um ihre Achse zu beschreiben, ergänzen wir die Vektoren $\vec{\ell}$ und $\vec{m}_0$ durch den Vektor

$$\vec{n}_0 = \vec{\ell} \times \vec{m}_0$$

zu einem rechtshändigen Orthonormalsystem. Der Einheitsvektor $\vec{n}_0$ liegt, wie auch $\vec{m}_0$, in der Ebene des Erdäquators und steht auf $\vec{m}_0$ senkrecht. Da die Vektoren $\vec{i}, \vec{k}, \vec{\ell}$ und $\vec{m}_0$ in einer Ebene liegen (Abb. 4), ist

$$\vec{\ell} \times \vec{m}_0 = \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j}\,,$$

also

$$\vec{n}_0 = -\vec{j}\,. \tag{6}$$

Bei der Drehung der Erde bewegt sich der Punkt P auf einem Breitenkreis, wodurch der Einheitsvektor $\vec{r}$ zeitabhängig wird. Wir können dafür die Zerlegung (4) übernehmen, wenn aus dem Vektor $\vec{m}_0$ der zeitabhängige Vektor $\vec{m}(t)$ wird, der sich so in der Äquatorebene dreht, daß zu jedem Zeitpunkt die Vektoren $\vec{\ell}, \vec{m}(t)$ und $\vec{r}$ in einer Ebene liegen:

$$\vec{r} = \cos\varphi \cdot \vec{m} + \sin\varphi \cdot \vec{\ell}\,. \tag{7}$$

Der Vektor $\vec{m}$ vollführt in einem Sterntag, also in der Zeit $T_\star = 0{,}99727\,T_\odot = 23\,\mathrm{h}\ 56\,\mathrm{m}\ 04\,\mathrm{s}$ (Sonnenzeit) eine volle Umdrehung in der Äquatorebene, so daß nach Abb. 5

$$\vec{m} = \cos\omega_\star t \cdot \vec{m}_0 + \sin\omega_\star t \cdot \vec{n}_0 \tag{8}$$

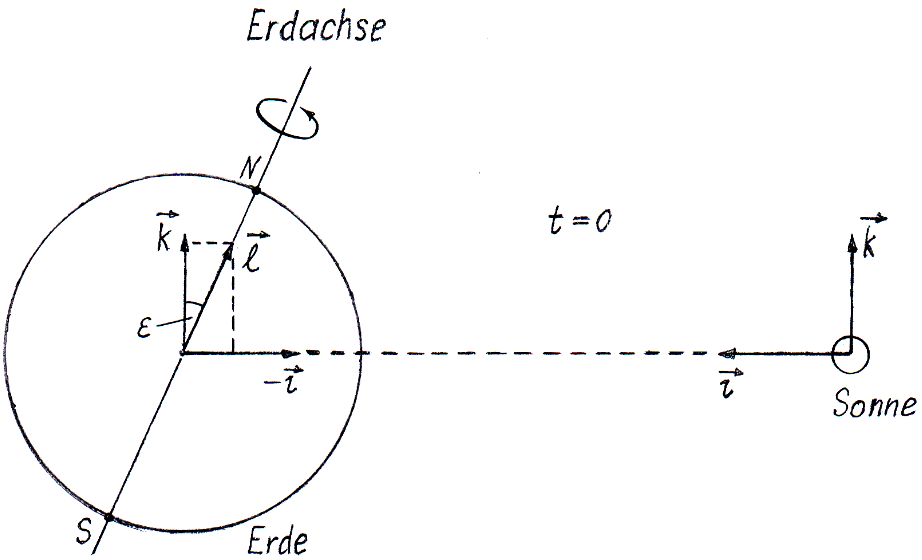

Abbildung 3: Die Erdachse wird durch den im Raum feststehenden Vektor $\vec{\ell}$ beschrieben. Dessen Neigung gegen die auf der Erdbahnebene errichtete Vertikale $\vec{k}$ ist die „Schiefe der Ekliptik“.

gilt, wobei

$$\omega_\star = \frac{2\pi}{T_\star} \tag{9}$$

ist. Mit den Formeln (5) und (6) ergibt sich der Vektor $\vec{m}(t)$ zu

$$\vec{m} = \cos\omega_\star t \cdot (-\cos\varepsilon \cdot \vec{\imath} - \sin\varepsilon \cdot \vec{k}) - \sin\omega_\star t \cdot \vec{\jmath}\,.$$

Indem wir auch den Vektor $\vec{\ell}$ gemäß (3) durch die Einheitsvektoren unseres ursprünglichen Koordinatensystems ausdrücken, erhalten wir schließlich für den Vektor $\vec{r}(t)$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) = &- (\sin\varepsilon\sin\varphi + \cos\varepsilon\cos\varphi\cos\omega_\star t) \cdot \vec{\imath} \\ &- \cos\varphi\sin\omega_\star t \cdot \vec{\jmath} \\ &+ (\cos\varepsilon\sin\varphi - \sin\varepsilon\cos\varphi\cos\omega_\star t) \cdot \vec{k}\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Damit können wir zu jedem Zeitpunkt im Laufe eines Jahres angeben, welche Richtung die Vertikale im Punkt P in dem von den Vektoren $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ und $\vec{k}$ aufgespannten Koordinatensystem, in welchem der Fixsternhimmel ruht, hat. Insbesondere kehrt sie – wie es sein muß – nach Ablauf eines *Stern*tages immer wieder in ihre Ausgangslage zurück.

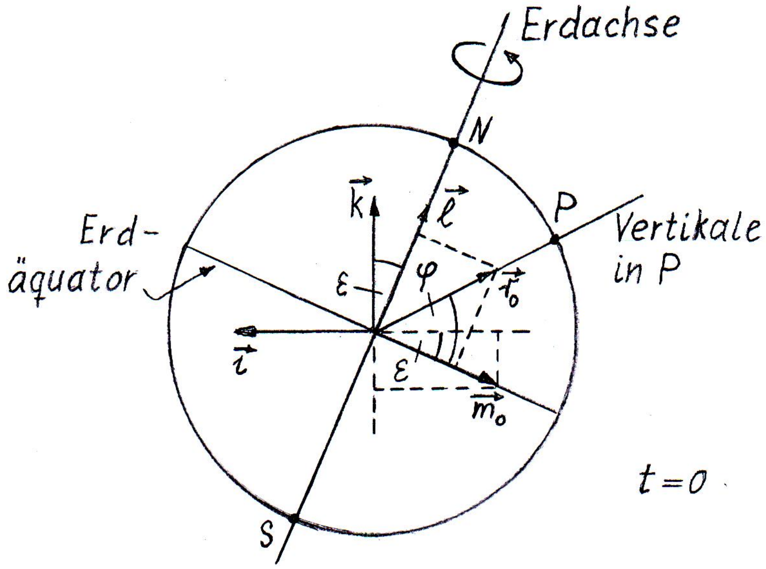

Abbildung 4: Für den Punkt P mit der geographischen Breite φ und dem Ortsvektor $\vec{r}_0$ ist zum Zeitpunkt $t = 0$ (Sommeranfang auf der Nordhalbkugel) gerade Mittag.

Die Sonne ist nach dieser Zeit jedoch noch nicht wieder auf den Meridian zurückgekehrt. Infolge der Bahnbewegung der Erde während eines Sterntages hat sich die Richtung zur Sonne geändert (Abb. 6), und die Erde muß sich über einen Sterntag hinaus weiter um ihre Achse drehen, bis es wieder Mittag ist. Dies erklärt den bereits berücksichtigten Unterschied zwischen Stern- und Sonnentag. Die Ergebnisse (1) (Richtung zur Sonne) und (10) (Richtung der Vertikalen) sind die bislang wichtigsten in unserer Betrachtung. Mit ihrer Hilfe können wir für jeden Zeitpunkt eines Jahres die Höhe h der Sonne über dem Horizont des Beobachters im Punkt P berechnen. Nach Abb. 7 ist nämlich das Skalarprodukt der Einheitsvektoren $\vec{r}$ und $(-\vec{u})$

$$\vec{r} \cdot (-\vec{u}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - h\right),$$

also mit (1) und (10)

$$\begin{aligned} \sin h &= -\vec{r} \cdot \vec{u} \\ &= \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi \cdot \cos\omega_a t + \cos\varphi \cdot (\cos\varepsilon \cdot \cos\omega_a t \cdot \cos\omega_\star t + \sin\omega_a t \cdot \sin\omega_\star t)\,. \end{aligned} \tag{11}$$

Dies ist die Sonnenschein-Formel. In ihr bedeutet t die Zeit, die seit dem 21. Juni, 12 Uhr

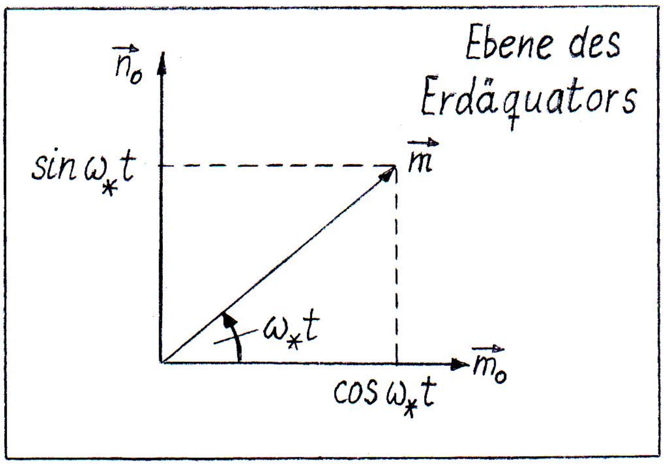

Abbildung 5: Senkrechter Blick auf die Ebene des Erdäquators. Bei der Drehung der Erde um ihre eigene Achse ist der Vektor $\vec{m}(t)$ ein mit dem Punkt P rotierender Vektor.

mittags vergangen ist. Bevor wir die Formel in eine etwas leichter zu handhabende Form bringen, betrachten wir zunächst eine erste, einfache Anwendung.

3 Beispiel: Sommeranfang

Wir bestimmen die Höhe der Sonne zum Zeitpunkt $t = 0$, d.i. die Mittagshöhe zu Sommeranfang. Aus (11) erhalten wir

$$\begin{aligned}\sin h &= \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi + \cos\varepsilon \cdot \cos\varphi \\ &= \cos(\varphi - \varepsilon) \\ &= \sin\left[90^\circ \pm (\varphi - \varepsilon)\right],\end{aligned}$$

also

$$h = 90^\circ - |\varphi - \varepsilon|\,. \qquad (12)$$

Für $\varphi = 51^\circ$ beträgt die Sonnenhöhe demnach $h = 62{,}5^\circ$.

Aus (12) können wir weiterhin ablesen, in welcher geographischen Breite die Sonne zu diesem Zeitpunkt im Zenit steht. Dann ist $h = 90^\circ$, und die Vertikale am Beobachtungsort fällt mit der Richtung zur Sonne zusammen (Abb. 8). Wir erhalten $\varphi = \varepsilon = 23{,}5^\circ$, die geographische Breite des nördlichen Wendekreises. Schließlich fragen wir nach der geographischen Breite, bei der sich zum besagten Zeitpunkt die Sonne am Horizont befindet ($h = 0$). Aus (12) lesen wir $\varphi = \varepsilon - 90^\circ = -66{,}5^\circ$ ab, da $-90^\circ \leq \varphi \leq +90^\circ$ gelten muß. Das ist die geographische Breite des südlichen Polarkreises (siehe auch Tab. 1).

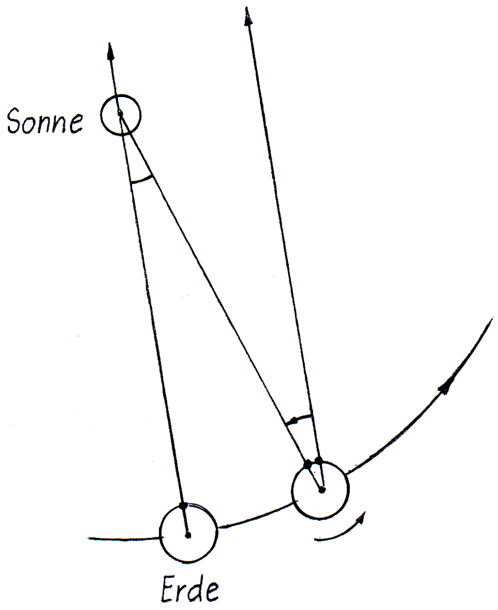

Abbildung 6: Zum Unterschied von Sterntag und Sonnentag.

4 Vereinfachung der Sonnenscheinformel

Wir fragen nun nach der Sonnenhöhe an einem ganz bestimmten Tag, dem Tag n nach dem 21. Juni, zu einer bestimmten Zeit τ, die *seit dem Mittag* dieses Tages vergangen ist. Die seit Mittag des 21. Juni vergangene Zeit t zerlegen wir also gemäß

$$t = n \cdot T_\odot + \tau \tag{13}$$

in zwei Summanden, wobei der erste die Jahreszeit $n \cdot T_\odot$ und der zweite die Tageszeit τ bedeuten.

Wir betrachten nun in der Sonnenscheinformel (11) zunächst die Terme, die den Jahreslauf der Erde um die Sonne erfassen, also $\cos \omega_a t$ und $\sin \omega_a t$. Mit (13) wird

$$\begin{aligned} \cos \omega_a t &= \cos \left[\frac{2\pi}{T_a} (nT_\odot + \tau) \right] \\ &= \cos \left(2\pi n \frac{T_\odot}{T_a} \right) \cdot \cos \frac{2\pi\tau}{T_a} - \sin \left(2\pi n \frac{T_\odot}{T_a} \right) \cdot \sin \frac{2\pi\tau}{T_a} \,. \end{aligned}$$

Da ein Zuwachs von τ um $24\,\mathrm{h} = 1T_\odot$ einer Erhöhung von n um eins in (13) gleichkommt, ist der größte Wert, den $\frac{2\pi\tau}{T_a}$ annehmen kann, $\frac{2\pi}{365{,}2564} = 0{,}0172$. Damit wird $\cos \frac{2\pi\tau}{T_a}$ niemals im Laufe eines Tages kleiner als 0,9999 und $\sin \frac{2\pi\tau}{T_a}$ niemals größer als 0,0172.

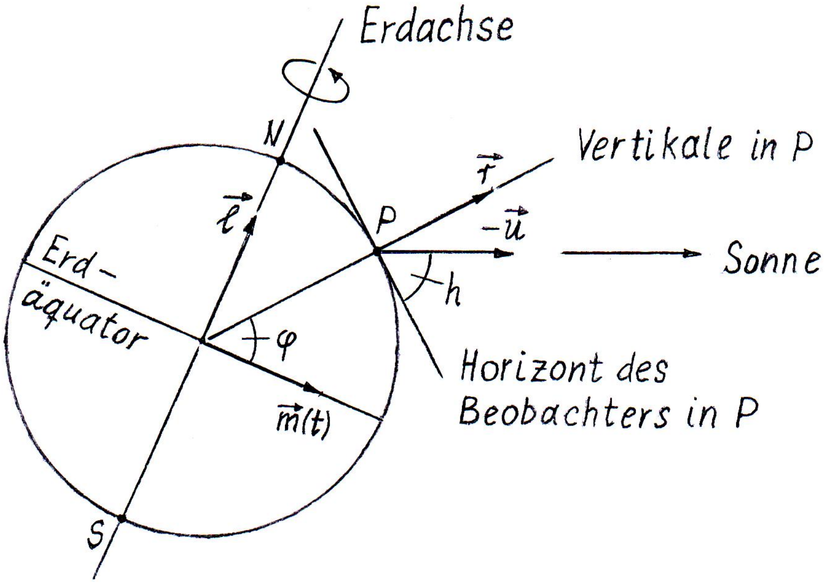

Abbildung 7: Horizont und Vertikale im Punkt P der Erdoberfläche. Der Winkel h ist die Höhe der Sonne über dem Horizont.

Deshalb ist es in guter Näherung gerechtfertigt,

$$\cos\omega_a t \approx \cos\left(2\pi n \frac{T_\odot}{T_a}\right) \approx \cos\frac{2\pi n}{365} \tag{14}$$

und entsprechend

$$\sin\omega_a t \approx \sin\frac{2\pi n}{365} \tag{15}$$

zu schreiben, $\cos\omega_a t$ und $\sin\omega_a t$ also im Laufe *eines* Tages als konstant anzusehen.

Um den Formelsatz übersichtlich zu halten, schreiben wir von nun an zur Abkürzung

$$\nu \equiv \frac{2\pi n}{365} \,. \tag{16}$$

In einem letzten Schritt wenden wir uns den Termen in (11) zu, die die Drehung der Erde um ihre eigene Achse beschreiben. Mit den Näherungen (14) und (15) wird der Klammerausdruck von (11)

$$\cos\varepsilon\cos\nu\cdot\cos\left(2\pi\frac{t}{T_\star}\right) + \sin\nu\cdot\sin\left(2\pi\frac{t}{T_\star}\right) \,. \tag{17}$$

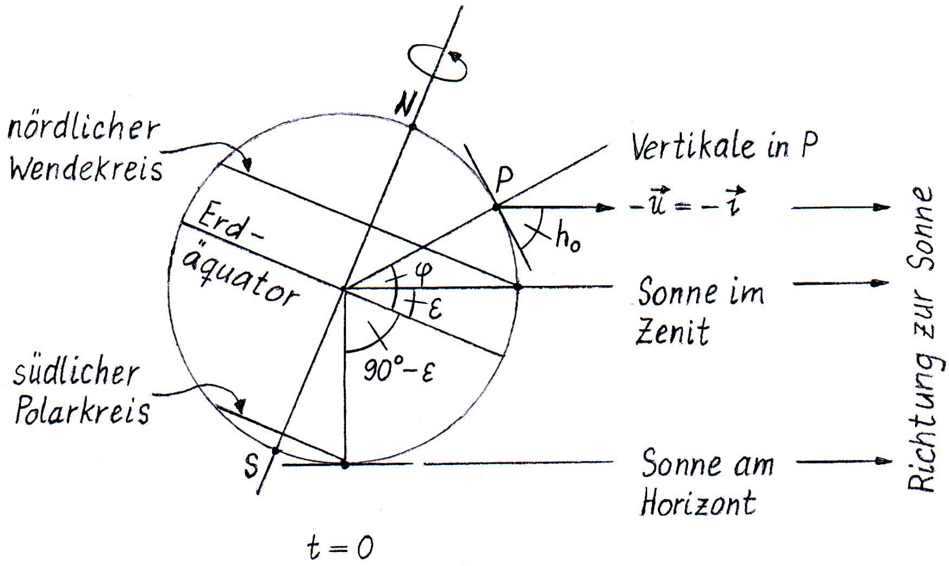

Abbildung 8: Die Mittagshöhen der Sonne zu Sommeranfang im Punkt P mit der geographischen Breite φ, am nördlichen Wendekreis und am südlichen Polarkreis.

Wir können diesen Ausdruck mit einer zunächst unbekannten Funktion U in der Form

$$\begin{aligned} U \cos\left(2\pi \frac{\tau}{T_\star}\right) &= U \cos\left[\frac{2\pi}{T_\star}(t - nT_\odot)\right] \\ &= U \cos\left(2\pi n \frac{T_\odot}{T_\star}\right) \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T_\star}\right) + U \sin\left(2\pi n \frac{T_\odot}{T_\star}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{T_\star}\right) \end{aligned} \tag{18}$$

schreiben. Da die Gleichheit von (17) und (18) zu jeder Zeit t bestehen soll, ergibt ein Koeffizientenvergleich

$$U \cos\left(2\pi n \frac{T_\odot}{T_\star}\right) = \cos\varepsilon \cdot \cos\nu$$

und

$$U \sin\left(2\pi n \frac{T_\odot}{T_\star}\right) = \sin\nu\,.$$

Indem wir beide Gleichungen quadrieren, danach addieren und den „trigonometrischen Pythagoras“ anwenden, erhalten wir für die unbekannte Funktion U

$$\begin{aligned} U^2 &= \cos^2\varepsilon \cdot \cos^2\nu + \sin^2\nu \\ &= 1 - \sin^2\varepsilon \cdot \cos^2\nu\,. \end{aligned}$$

Wenn wir nun noch näherungsweise $T_\star \approx 24\,\mathrm{h}$ schreiben, haben wir die Sonnenscheinformel in der Form, die wir in allen Anwendungen verwenden werden:

$$\sin h = \sin\varepsilon \cdot \sin\varphi \cdot \cos\nu + \cos\varphi \cdot \sqrt{1 - \sin^2\varepsilon \cdot \cos^2\nu} \cdot \cos\frac{2\pi\tau}{24\,\mathrm{h}}\,. \tag{19}$$

Gegenüber dem strengen Resultat (11) hat diese Form den Vorteil, daß in den Argumenten der Winkelfunktionen die durch n beschriebene Jahreszeit und die durch τ ab Mittag des n-ten Tages nach dem 21. Juni beschriebene Tageszeit getrennt vorkommen.

5 Beispiel: Frühlings-, Herbst- und Winteranfang

Wir stellen zuerst fest, daß unser bereits behandeltes Beispiel der Mittagshöhe zu Sommeranfang natürlich auch durch unsere vereinfachte Formel (19) mit $n = 0$ und $\tau = 0$ richtig wiedergegeben wird.

Zu *Herbstanfang* nimmt ν den Wert $\frac{\pi}{2}$ und zu *Frühlingsanfang* den Wert $\frac{3\pi}{2}$ an. Für diese Werte ist $\cos\nu = 0$, und wir erhalten für die Mittagszeit ($\tau = 0$) aus (19) $\sin h = \cos\varphi$, so daß sich die Sonnenhöhe zu $h = 90° \pm \varphi$ ergibt. Für die geographische Breite $\varphi = 51°$ beträgt sie $h = 39°$.

Für den *Winteranfang* ist $\nu = \pi$, folglich $\cos\nu = -1$, und die Sonnenscheinformel (19) ergibt für die Mittagshöhe der Sonne

$$\sin h = \cos(\varepsilon + \varphi) = \sin[90° \pm (\varepsilon + \varphi)]\,,$$

also $h = 90° \pm (\varepsilon + \varphi)$. Für die geographische Breite $\varphi = 51°$ bedeutet dies $h = 15{,}5°$.

Daß die Mittagshöhen der Sonne zu Sommer- und Winteranfang die Extremwerte der Sonnenhöhen im Laufe eines Jahres sind, wie es die Erfahrung lehrt, folgt ebenfalls aus der Sonnenscheinformel (19). Dazu fassen wir die Höhe h als Funktion der Jahreszeit n auf. Die Extremwertbedingung $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}n} = 0$ wird erfüllt, wenn $\sin\nu = 0$ ist, also für $n = 0$ (Sommeranfang) und $\nu = \pi$ (Winteranfang).

In Fortsetzung dieses Beispiels wollen wir nun fragen, in welcher geographischen Breite die Sonne am Mittag ($\tau = 0$) eines bestimmten Tages im Zenit steht ($h = 90°$). Unter diesen Bedingungen vereinfacht sich die Sonnenscheinformel (19) zu

$$1 = A\sin\varphi + \sqrt{1 - A^2} \cdot \cos\varphi \qquad \text{mit} \qquad A = \sin\varepsilon \cdot \cos\nu\,.$$

Mit Hilfe von $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$ resultiert daraus eine quadratische Gleichung für $\sin\varphi$ mit der Doppellösung

$$\sin\varphi = A = \sin\varepsilon \cdot \cos\nu\,.$$

Da der Faktor $\cos\nu$ auf das Intervall $[-1, 1]$ eingeschränkt ist, sieht man sofort, daß die Sonne nur in der geographischen Breitenzone $-\varepsilon \leq \varphi \leq \varepsilon$ im Zenit stehen kann. Für den Sommeranfang ($n = 0$) kennen wir das Resultat bereits. Für den Frühlings- und Herbstanfang erhalten wir $\varphi = 0$; die Sonne steht über dem Äquator im Zenit. Zu Winteranfang erhalten wir schließlich $\varphi = -\varepsilon$. Während also die Sonne zu Sommeranfang

Tabelle 1: Mittagshöhen der Sonne zu Beginn der Jahreszeiten in verschiedenen geographischen Breiten

φ		$\frac{2\pi n}{365}$, Anfang von ...		
		0, Sommer	$\frac{\pi}{2}$, Herbst; $\frac{3\pi}{2}$, Frühling	π, Winter
$90°$	Nordpol	ε	0	$-\varepsilon$
$90° - \varepsilon$	nördl. Polarkreis	2ε	ε	0
ε	nördl. Wendekreis	$90°$	$90° - \varepsilon$	$90° - 2\varepsilon$
0	Äquator	$90° - \varepsilon$	$90°$	$90° - \varepsilon$
$-\varepsilon$	südl. Wendekreis	$90° - 2\varepsilon$	$90° - \varepsilon$	$90°$
$\varepsilon - 90°$	südl. Polarkreis	0	ε	2ε
$-90°$	Südpol	$-\varepsilon$	0	ε

über dem nördlichen Wendekreis im Zenit steht, steht sie zu Winteranfang über dem südlichen Wendekreis im Zenit.

Außer dem Äquator und den Wendekreisen haben auch die Pole und die Polarkreise markante geographische Breiten. Der Leser ist aufgerufen, die in Tab. 1 zusammengestellten Resultate selbst zu verifizieren.

Literatur

[1] Lotze, K.-H.: *Die Sonnenschein-Formel – Teil I: Anwendungen der Sonnenschein-Formel.* Der Mathematische und Naturwissenschaftliche Unterricht (MNU) 58(2005)(4)223-227

[2] Dorschner, J.; Gürtler, J.; Lotze, K.-H.; Meusinger, H.; Pfau, W.: *Astronomie – Astrophysik – Kosmologie.* (Kuhn, W. (Hrsg.): Handbuch der Experimentellen Physik, Sekundarbereich II, Bd. 11N). AULIS-Verlag, Köln 2011

[3] Marsden, J.; Weinstein, A.: *Calculus.* Springer-Verlag New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo 1985 (3 Bände)